

Skript zur Vorlesung Topologie

Dr. Stephan Mescher

Universität Leipzig, Sommersemester 2020

(Version vom 16. Juli 2020)

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen zu topologischen Räumen	6
1.1 Metrische Räume	6
1.2 Topologische Räume	10
1.3 Weitere Grundbegriffe	12
1.4 Folgen in topologischen Räumen	15
2 Konstruktionen topologischer Räume	18
2.1 Homöomorphismen	18
2.2 Unterräume und induzierte Topologien	20
2.3 Produkttopologien	23
2.4 Quotientenräume und koinduzierte Topologien	27
2.5 Summen topologischer Räume	32
2.6 Pushouts und Pullbacks	34
3 Eigenschaften topologischer Räume	38
3.1 Zusammenhang	38
3.2 Wegzusammenhang	42
3.3 Trennungseigenschaften	46
3.4 Existenz stetiger Funktionen	49
3.5 Metrisierbarkeit	53
3.6 Vollständigkeit metrischer Räume	55
4 Kompaktheit	60
4.1 Überdeckungen und Kompaktheit	60
4.2 Folgenkompaktheit	65
4.3 Beispiele zu Identifizierungen kompakter Räume	67
4.4 Lokal kompakte Räume	70
4.5 Räume stetiger Abbildungen	73
4.6 Filter und der Satz von Tychonoff	78
4.7 Parakompaktheit	82

5	Transformationsgruppen	86
5.1	Topologische Gruppen	86
5.2	Gruppenwirkungen auf topologischen Räumen	90
5.3	Homogene Räume	96
6	Grundbegriffe der Homotopietheorie	101
6.1	Motivation und Vorgehensweise	101
6.2	Homotopie	103
6.3	Homotopieäquivalenz von Räumen	106
6.4	Kategorien und Funktoren	111
6.5	Homotopien von Wegen	116
7	Die Fundamentalgruppe	121
7.1	Definition und Eigenschaften der Fundamentalgruppe	121
7.2	Einfacher Zusammenhang und Homotopien von Schlingen	126
7.3	Die Fundamentalgruppe von S^1	131
7.4	Die Fundamentalgruppe von S^n für $n > 1$	136
7.5	Anwendungen der Fundamentalgruppe	138
8	Überlagerungen	143
8.1	Definition und Konstruktionen von Überlagerungen	143
8.2	Hochhebungseigenschaften von Überlagerungen	147
8.3	Fasertransport und Monodromiewirkung	153
8.4	Klassifikation von Überlagerungen I: Eindeutigkeit	157
8.5	Klassifikation von Überlagerungen II: Existenz	162
8.6	Deckbewegungsgruppen	168
9	Ausblick	174
A	Exkurse	178
A.1	Netze und Moore-Smith-Konvergenz	178

Einleitung

In dieser Vorlesung wollen wir die Grundlagen des Gebiets der Topologie besprechen. In den Grundvorlesungen der Analysis haben die wichtigsten Begriffe wie Konvergenz, Stetigkeit, und Differenzierbarkeit eines gemeinsam: bei allen Begriffen geht es darum, wie sich Funktionen oder Folgen *in der Nähe* eines Punktes im Raum verhalten. Als Raum betrachten wir hierbei meistens den $\mathbb{R}^n$ und als Abstand von zwei Punkten die Länge bzw. Norm ihres Verbindungsvektors.

Allgemeiner betrachtet man in der Analysis II den Begriff des metrischen Raums, auf dem wir keine Vektorraumstruktur mehr benötigen. Stattdessen reicht es, auf einer Menge eine *Abstandsfunktion*, genannt *Metrik*, zu betrachten. Wie wir zu Beginn der Vorlesung sehen werden, lassen sich hierbei Begriffe wie Umgebung und Stetigkeit in metrischen Räumen auch in sehr allgemeiner Form und ohne Erwähnung der Metrik ausdrücken.

In der Topologie geht man nun noch einen Abstraktionsschritt weiter. Wir werden zunächst Begriffe wie *offene Menge* und *Umgebung* rein abstrakt durch Mengensysteme ausdrücken, was zur Vorstellung eines topologischen Raumes führt. Auf topologischen Räumen kann nun ebenfalls eine allgemeine Formulierung der Stetigkeit von Abbildungen eingeführt werden.

Im ersten Teil der Vorlesung geht es um mengentheoretische Topologie, womit gemeint ist, dass wir uns anschauen wollen, welche Eigenschaften wir topologischen Räumen und stetigen Abbildungen zwischen ihnen zuordnen können und welche fundamentalen Unterschiede zwischen unterschiedlichen topologischen Räumen bestehen können. Im zweiten Teil der Vorlesung soll es um einen ersten Einblick in die algebraische Topologie gehen. Wir werden am Beispiel der Fundamentalgruppe sehen wie es möglich ist, topologischen Räumen algebraische Invarianten zuzuordnen, an denen wir Eigenschaften des Raumes ablesen und mit denen wir topologische Räume voneinander unterscheiden können.

Literatur

Die folgenden an folgenden Bücher und Skripte orientieren sind als Begleitung zur Vorlesung empfohlen. Bisher habe ich mich nicht nach einem bestimmten Buch gerichtet, sondern unterschiedliche Bücher zur Vorbereitung herangezogen. Am wichtigsten sind hierbei die Bücher von Laures/Szymik, Bredon, Lee und Munkres.

Die grobe Struktur und Thematik der Vorlesung entspricht in etwa Kapitel 1-8 des Buchs von Laures/Szymik.

- Gerd Laures, Markus Szymik, *Grundkurs Topologie*, 2. Auflage, Springer, 2015.
- Glen E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer, 1993 (Kapitel 1 und 3).
- John M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2. Auflage, Springer, 2011.
- Friedhelm Waldhausen, *Skript zur Vorlesung Topologie (Uni Bielefeld)*,
<https://www.math.uni-bielefeld.de/fw/ein.pdf>.
- James R. Munkres, *Topology*, 2nd edition, Prentice Hall, 2000.
- Klaus Jänich, *Topologie*, 8. Auflage, Springer, 2005.
- James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.
- Boto von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, 3. Auflage, Springer, 2000.
- Christoph Schweigert, *Skript zur Vorlesung Topologie (Uni Hamburg)*,
<https://www.math.uni-hamburg.de/home/richter/skript-topologie-schweigert.pdf>.
- Stefan Waldmann, *Topology*, Springer, 2014.
- Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002 (Chapter 1).

Notation und Konventionen

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- $\square$ steht für das Ende eines ganzen Beweises, $\blacksquare$ für das Ende des Beweises einer Unterbehauptung.
- $\mathfrak{P}(X)$ sei die Potenzmenge von X .
- $A \subset B$ bedeutet, dass A eine Teilmenge von B ist, wobei der Fall $A = B$ mit einbegriffen ist.
- $A \subsetneq B$ bedeutet, dass A eine *echte* Teilmenge von B ist, was den Fall $A = B$ ausschließt.
- $\text{id}_X : X \rightarrow X$, $\text{id}_X(x) = x$, sei für jede Menge X die Identitätsabbildung.
- $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{\text{eukl}} < 1\}$, $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{\text{eukl}} \leq 1\}$.
- $X \approx Y : \Leftrightarrow X$ ist homöomorph zu Y .
- $G \cong H : \Leftrightarrow G$ und H sind isomorphe Gruppen.
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- $f \simeq g$ für Abbildungen bedeutet f und g sind homotop.
- $X \simeq Y$ für Räume bedeutet X und Y sind homotopieäquivalent.

Kapitel 1

Grundlagen zu topologischen Räumen

Wir betrachten zunächst metrische Räume und werden sehen wie wir uns durch mengentheoretische Abstraktion vom Begriff der Metrik lösen können. Auf dieser Grundlage betrachten wir dann den Begriff des topologischen Raums, führen weitere Grundbegriffe ein und betrachten Folgen in topologischen Räumen, wobei wir erste Unterschiede zwischen metrischen und allgemeineren topologischen Räumen feststellen werden.

1.1 Metrische Räume

Diesen Begriff kennen wir bereits aus der Analysis II. Die Formalisierung der Idee, dass Punkte „nahe beieinander“ liegen, wird hier durch die Einführung einer *Abstandsfunktion* gelöst, die durch drei einfache Eigenschaften charakterisiert ist.

Definition 1.1. Sei X eine Menge und $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. d heißt *Metrik* auf X , wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) (*Positive Definitheit*) Für alle $x, y \in X$ ist $d(x, y) \geq 0$ und es gilt genau dann $d(x, y) = 0$, wenn $x = y$,
- (ii) (*Symmetrie*) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iii) (*Dreiecksungleichung*) Für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Ist d eine Metrik auf X , so heißt das Paar (X, d) ein *metrischer Raum*.

Beispiel 1.2. (1) Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, so ist durch

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(v, w) = \|v - w\|$$

eine Metrik auf V gegeben, die von $\|\cdot\|$ induzierte Metrik. Die von der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Metrik wird auch als *euklidische Metrik* bezeichnet.

(2) Auf jeder Menge X ist eine Metrik gegeben durch

$$d_0 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y, \\ 0 & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

d_0 heißt die *diskrete Metrik auf X* . Wir werden jedoch später sehen, dass die diskrete Metrik aus topologischer Sicht keine besonders interessante Metrik ist.

(3) Jede Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) ist wieder ein metrischer Raum vermöge der eingeschränkten Metrik $d|_{A \times A}$.

Inbesondere ist also jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ein metrischer Raum, wenn wir sie mit der Einschränkung der von der euklidischen Norm erzeugten Metrik betrachten. Betrachte im Folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ stets mit dieser Metrik, solange nichts anderes erwähnt ist.

Definition 1.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(1) Für $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ sei

$$B_\varepsilon(x_0) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

die *offene ε -Kugel um x_0* .

(2) Sei $x_0 \in X$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *d -Umgebung von x_0* , falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(x_0) \subset A$.

(3) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *d -offen in X* , wenn es für jedes $x_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(x_0) \subset U$, wenn U also d -Umgebung jedes ihrer Punkte ist.

Satz 1.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) X und $\emptyset$ sind d -offen in X .

b) Ist I eine beliebige Menge und ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie d -offener Teilmenge von X , so ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ wieder d -offen in X .

c) Sind $U_1, \dots, U_n$ d -offene Teilmengen von X , wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, so ist $\bigcap_{i=1}^n U_i$ wieder d -offen in X .

d) $B_\varepsilon(x_0)$ ist d -offen in X für alle $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$.

Beweis. a) Dies ist klar.

b) Sei $x_0 \in \bigcup_{i \in I} U_i$ beliebig. Dann gibt es ein $i_0 \in I$ mit $x_0 \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} nach Voraussetzung d -offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$, so dass

$$B_\varepsilon(x_0) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Da x_0 beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

- c) Sei $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, also $x_0 \in U_i$ für jedes $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Nach Voraussetzung gibt es für jedes solche i ein $\varepsilon_i > 0$, so dass $B_{\varepsilon_i}(x_0) \subset U_i$. Setzen wir nun $\varepsilon_0 := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\} > 0$, so folgt

$$B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset B_{\varepsilon_i}(x_0) \subset U_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \Rightarrow \quad B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i.$$

Also ist $\bigcap_{i=1}^n U_i$ wieder d -offen.

- d) Übung. □

Bemerkung 1.5. Unendliche Schnitte d -offener Teilmengen sind im allgemeinen *nicht* wieder d -offen. Sei etwa $x_0 \in X$ beliebig und sei $U_n := B_{\frac{1}{n}}(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(x_0) = \{x_0\},$$

welches zum Beispiel für die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$ keine offene ε -Kugel enthält und damit nicht d -offen sein kann.

Definition 1.6. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $x_0 \in X$. f ist d_X - d_Y -stetig in x_0 , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ so dass } d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ für alle } x \in X \text{ mit } d_X(x, x_0) < \delta.$$

f ist d_X - d_Y -stetig, wenn f in jedem $x_0 \in X$ d_X - d_Y -stetig ist.

Bemerkung 1.7. Die d_X - d_Y -Stetigkeit von f in x_0 in Definition 1.6 lässt sich äquivalent formulieren als

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ so dass } f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(x_0)$$

oder auch als

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ so dass } B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(x_0)).$$

Satz 1.8. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- f ist genau dann d_X - d_Y -stetig in $x_0 \in X$, wenn für jede d_Y -Umgebung $U \subset Y$ von $f(x_0)$ die Menge $f^{-1}(U) \subset X$ eine d_X -Umgebung von x_0 ist.
- f ist genau dann d_X - d_Y -stetig, wenn für jedes d_Y -offene $U \subset Y$ die Menge $f^{-1}(U)$ d_X -offen ist.

Beweis. a) „ $\Rightarrow$ “: Sei U eine d_Y -Umgebung von $f(x_0)$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset U$. Nach Bemerkung 1.7 gibt es dann $\delta > 0$, so dass

$$B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \subset f^{-1}(U).$$

Also ist $f^{-1}(U)$ eine d_X -Umgebung von x_0 .

„ $\Leftarrow$ “: Da $B_\varepsilon(f(x_0))$ eine d_Y -Umgebung von $f(x_0)$ ist (dies ist klar!), ist nach Annahme $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ eine d_X -Umgebung von x_0 . Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$, so dass wieder nach Bemerkung 1.7 folgt, dass f d_X - d_Y -stetig in x_0 ist.

b) Dies folgert man leicht aus Teil a). □

An diesem Satz sehen wir, dass sich die Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen vollständig durch Umgebungen und offene Mengen ausdrücken lässt. Wir werden sehen, dass diese Begriffe die eigentlichen Schlüsselbegriffe bei der Formulierung von Stetigkeit sind, wofür wir im Folgenden weitere Indizien sammeln wollen.

Definition 1.9. Sei X eine Menge. Zwei Metriken $d, d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißen *äquivalent*, falls es Konstanten $C_2 > 0$ gibt, so dass

$$C_1 \cdot d(x, y) \leq d'(x, y) \leq C_2 \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X. \quad (1.1)$$

Satz 1.10. Seien X eine Menge und seien $d, d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ zwei äquivalente Metriken auf X . Dann gelten:

a) $U \subset X$ ist genau dann eine d -Umgebung von $x_0 \in X$, wenn U eine d' -Umgebung von x_0 ist.

b) $U \subset X$ ist genau dann d -offen, wenn sie d' -offen ist.

Beweis. a) Sei im Folgenden jeweils $B_\varepsilon(x)$ die offene Kugel bezüglich d und $B'_\varepsilon(x)$ die offene Kugel bezüglich d' und seien $C_1, C_2 > 0$ gegeben wie in (1.1). Dann rechnet man leicht nach, dass für jedes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gilt, dass

$$B_{\varepsilon/C_2}(x) \subset B'_\varepsilon(x) \quad \text{und} \quad B'_{C_1\varepsilon}(x) \subset B_\varepsilon(x).$$

Daraus folgert man leicht die Behauptung.

b) Dies lässt sich direkt aus Teil a) und der Definition von d -Offenheit bzw. d' -Offenheit folgern. □

Wir sehen also, dass eine ganze Klasse von Metriken dieselben Umgebungen bzw. offenen Mengen besitzt. Kombinieren wir nun Satz 1.8 und Satz 1.10, so erhalten wir:

Korollar 1.11. Seien X, Y Mengen, seien $d_X, d'_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ äquivalente Metriken auf X und seien $d_Y, d'_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ äquivalente Metriken auf Y . Dann ist f genau dann d_X - d_Y -stetig, wenn sie d'_X - d'_Y -stetig ist.

Also ist auch hier der Stetigkeitsbegriff für eine ganze Klasse von Metriken derselbe. Dies legt nahe, dass wir uns vom Begriff der Metrik lösen und stattdessen die Begriffe der Umgebung und der offenen Menge in den Mittelpunkt stellen sollten.

1.2 Topologische Räume

Definition 1.12. Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt *Topologie auf X* , falls es die folgenden Eigenschaften hat:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- (ii) Sei I eine Menge und sei $U_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$. Dann gilt: $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.
- (iii) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und seien $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$. Dann gilt: $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{T}$.

Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X , so heißt das Paar $(X, \mathcal{T})$ *topologischer Raum*. Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Teilmengen von X* .

(Hinweis zur Notation: Man schreibt häufig nur X statt $(X, \mathcal{T})$, falls klar ist, welche Topologie gemeint ist.)

Beispiel 1.13. (1) Auf jeder Menge X existieren mindestens drei Topologien von eingeschränkter Nützlichkeit:

- (i) die *diskrete Topologie* $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$. In dieser Topologie ist *jede* Teilmenge von X offen.
- (ii) die *indiskrete Topologie* oder *Klumpentopologie* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Es sind also nur $\emptyset$ und X selbst offen.
- (iii) die *kofinite Topologie* $\mathcal{T} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}$. (Übung.)

(2) Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei

$$\mathcal{T}(d) := \{U \subset X \mid U \text{ ist } d\text{-offen}\}.$$

Dann ist $\mathcal{T}(d)$ nach Satz 1.4 eine Topologie auf X und heißt die *von d erzeugte Topologie auf X* . In Satz 1.10 haben wir gesehen, dass zwei äquivalente Metriken auf X dieselbe Topologie erzeugen.

(Spezialfall: Die diskrete Metrik auf einer Menge X aus Beispiel 1.2.(2) erzeugt auf jeder Menge X die diskrete Topologie. (Übung.))

Wir haben also jetzt einen abstrakten Rahmen für den Begriff der offenen Teilmenge eingeführt und wollen als Nächstes dasselbe mit dem Begriff der Umgebung durchführen.

Definition 1.14. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *Umgebung von x_0* , wenn es ein $U \in \mathcal{T}$ gibt, so dass $x_0 \in U$ und $U \subset A$.

Beispiel 1.15. (1) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Betrachte $(X, \mathcal{T}(d))$ als topologischen Raum. Dann ist $A \subset X$ genau dann eine Umgebung von x_0 , wenn A eine d -Umgebung von x_0 im Sinne von Definition 1.3.(2) ist.

- (2) In der diskreten Topologie auf einer Menge X ist für $x_0 \in X$ jedes $A \subset X$ mit $x_0 \in A$ eine Umgebung von x_0 . Insbesondere ist $\{x_0\}$ eine Umgebung von x_0 , woran man sieht, dass die diskrete Topologie keinen echten geometrischen Nutzen hat.

Satz 1.16. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $U \subset X$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Ist U offen und $x_0 \in U$, so ist U selbst eine offene Menge mit $U \subset U$, so dass U eine Umgebung von x_0 ist.

„ $\Leftarrow$ “: Nehme an, dass es für jedes $x \in U$ ein offenes U_x gibt, so dass $x \in U_x$ und $U_x \subset U$. Dann gilt

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} U_x \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} U_x.$$

Also ist U nach Eigenschaft (ii) einer Topologie eine offene Teilmenge von X . □

Als Nächstes wollen wir den Begriff der Stetigkeit auf topologische Räume verallgemeinern.

Definition 1.17. Seien X und Y topologische Räume und sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- (1) f heißt *stetig in* $x_0 \in X$, wenn für jede Umgebung $U \subset Y$ von $f(x_0)$ die Menge $f^{-1}(U) \subset X$ eine Umgebung von x_0 ist.
- (2) f heißt *stetig*, wenn für jede offene Teilmenge $U \subset Y$ die Menge $f^{-1}(U)$ eine offene Teilmenge von X ist.
- (3) Weiterhin bezeichne $C^0(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ ist stetig}\}$.

Beispiel 1.18. (1) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und versehe sie mit den von d_X und d_Y induzierten Topologien. Dann gilt nach Satz 1.8, dass $f : X \rightarrow Y$ genau dann stetig (in x_0) ist, wenn f d_X - d_Y -stetig (in x_0) ist.

- (2) Sei X mit der diskreten Topologie versehen und sei Y ein beliebiger topologischer Raum. Dann ist *jede* Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetig. (zu zeigen in Aufgabe 3 von Übungsblatt 1).

Satz 1.19. Seien X, Y und Z topologische Räume, seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen und sei $x \in X$. Ist f stetig in x und g stetig in $f(x)$, so ist $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig in x .

Beweis. Sei U eine Umgebung von $z := (g \circ f)(x)$ in Z . Da $g(f(x)) = z$ und da g stetig in $f(x)$ ist, ist $g^{-1}(U)$ eine Umgebung von $f(x)$ in Y . Da f stetig in x ist, ist daher $f^{-1}(g^{-1}(U))$ eine Umgebung von x in X . Da $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$, folgt daraus die Stetigkeit von $g \circ f$ in x . □

1.3 Weitere Grundbegriffe

Wir wollen nun weitere Begriffe besprechen, die uns für metrische Räume schon aus der Analysis bekannt sind. Für den Begriff der abgeschlossenen Menge können wir direkt nach die bekannte Definition für metrische Räume übernehmen.

Definition 1.20. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen in X ist.

Satz 1.21. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

- a) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen in X .
- b) Ist I eine Menge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X , so ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ wieder abgeschlossen in X .
- c) Sind $A_1, \dots, A_n$ abgeschlossene Teilmengen von X , wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, so ist $\bigcup_{i=1}^n A_i$ wieder abgeschlossen in X .

Beweis. Alle drei Teile folgen aus den definierenden Eigenschaften einer Topologie und den de Morgan'schen Regeln. Genauer:

- a) Da $X \setminus X = \emptyset$ und $X \setminus \emptyset = X$ nach Eigenschaft (i) einer Topologie offen sind, sind $\emptyset$ und X abgeschlossen.
- b) Nach Voraussetzung ist $X \setminus A_i$ offen für alle $i \in I$. Dann ist nach den de Morgan'schen Regeln

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} X \setminus A_i$$

wieder offen nach Eigenschaft (ii) einer Topologie.

- c) Nach Voraussetzung ist $X \setminus A_i$ offen für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Also ist nach den de Morgan'schen Regeln

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus A_i)$$

wieder offen nach Eigenschaft (iii) einer Topologie.

□

Definition 1.22. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$.

- (1) Das *Innere* von A ist gegeben durch

$$\mathring{A} := \{x \in A \mid A \text{ ist Umgebung von } x\}.$$

Weitere Notation: $\mathring{A} = \text{int}(A)$ („interior of A “). Elemente von $\mathring{A}$ heißen *innere Punkte* von A .

(2) Der Abschluss von A ist die Menge

$$\bar{A} := X \setminus \text{int}(X \setminus A).$$

(3) Der Rand von A ist die Menge

$$\partial A := \bar{A} \setminus \mathring{A}.$$

Elemente von ∂A heißen *Randpunkte von A* .

Es folgt unmittelbar aus der Definition, dass

$$\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$$

und dass

$$\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$$

für alle $A \subset X$.

Satz 1.23. Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ und $x \in X$. Es ist $x \in \bar{A}$ genau dann, wenn für jede Umgebung U von x gilt, dass $U \cap A \neq \emptyset$.

Beweis. Sei $x \in \bar{A} = X \setminus \text{int}(X \setminus A)$. Nach Definition gilt $x \notin \text{int}(X \setminus A)$ genau dann, wenn für jede Umgebung U von x gilt, dass $U \not\subset X \setminus A$, was wiederum äquivalent dazu ist, dass $U \cap A \neq \emptyset$ für jede Umgebung U von x . $\square$

Satz 1.24. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann gelten folgende Aussagen:

- a) $\mathring{A}$ ist die grösste offene Menge, die in A enthalten ist, d.h. ist U offen mit $U \subset A$, so ist $U \subset \mathring{A}$. Insbesondere ist $\mathring{A}$ offen in X .
- b) $\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält, d.h. ist B abgeschlossen mit $A \subset B$, so ist $\bar{A} \subset B$. Insbesondere ist $\bar{A}$ abgeschlossen in X .
- c) ∂A ist abgeschlossen in X .
- d) A ist genau dann offen, wenn $A = \mathring{A}$.
- e) A ist genau dann abgeschlossen, wenn $A = \bar{A}$.

Beweis. a) Die Offenheit von $\mathring{A}$ folgt aus Satz 1.16. Sei $U \subset A$ offen in X und sei $x \in U$. Dann ist U eine Umgebung von x , die in A enthalten ist, also gilt laut Definition, dass $x \in \mathring{A}$. Also ist $U \subset \mathring{A}$.

b) Wir berechnen, dass

$$X \setminus \bar{A} = X \setminus (X \setminus \text{int}(X \setminus A)) = \text{int}(X \setminus A),$$

welches nach a) offen ist. Also ist $\bar{A}$ abgeschlossen.

Ist $B \subset X$ abgeschlossen mit $A \subset B$, so gilt, dass $X \setminus B \subset X \setminus A$. Da aber $X \setminus B$ offen ist, gilt nach Teil a), dass $X \setminus B \subset \text{int}(X \setminus A)$. Damit folgt:

$$\bar{A} = X \setminus \text{int}(X \setminus A) \subset X \setminus (X \setminus B) = B.$$

- c) Es gilt $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap (X \setminus \overset{\circ}{A})$. Dies ist nach a) und b) ein Schnitt abgeschlossener Mengen, also ist ∂A nach Satz 1.21.b) abgeschlossen.
- d) „ $\Leftarrow$ “ folgt direkt aus a).
 „ $\Rightarrow$ “: Wir wissen, dass $\overset{\circ}{A} \subset A$. Nach Annahme ist aber A selbst eine offene Menge, die in A enthalten ist, also gilt laut a), dass $A \subset \overset{\circ}{A}$, woraus die Behauptung folgt.
- e) „ $\Leftarrow$ “ folgt direkt aus b).
 „ $\Rightarrow$ “: Wir wissen, dass $A \subset \bar{A}$. Nach Annahme ist aber A selbst eine abgeschlossene Menge, die A enthält, also gilt laut b), dass $\bar{A} \subset A$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Mit Hilfe abgeschlossener Mengen lassen sich alternative Kriterien für die Stetigkeit einer Abbildung formulieren.

Satz 1.25. Seien X und Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) f ist stetig.
- (ii) Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X .
- (iii) Für jedes $A \subset X$ gilt: $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): Ist V offen in Y , so ist $Y \setminus V$ abgeschlossen in Y . Also ist nach Annahme $f^{-1}(Y \setminus V)$ abgeschlossen in X und damit $X \setminus f^{-1}(Y \setminus V)$ offen in X . Nach Grundregeln der Mengenlehre ist jedoch

$$X \setminus f^{-1}(Y \setminus V) = f^{-1}(Y \setminus (Y \setminus V)) = f^{-1}(V).$$

Also ist $f^{-1}(V)$ offen und da V beliebig gewählt war, folgt die Stetigkeit von f .

(i) $\Rightarrow$ (iii): Nehme an, dass f stetig ist. Sei $A \subset X$ und $x \in \bar{A}$. Sei V eine Umgebung von $f(x)$ in Y . Dann ist $U := f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X . Da $x \in \bar{A}$ gilt nach Satz 1.23, dass $U \cap A \neq \emptyset$. Wegen $f(U) \subset V$ folgt insbesondere, dass

$$V \cap f(A) \supset f(U) \cap f(A) \neq \emptyset.$$

Also schneidet $f(A)$ jede Umgebung von $f(x)$. Wieder nach Satz 1.23 ist daher $f(x) \in \overline{f(A)}$. Also folgt $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Sei C abgeschlossen in Y und sei $A := f^{-1}(C)$. Nach Voraussetzung ist dann wegen $f(A) \subset C$:

$$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \bar{C} = C$$

nach Satz 1.24.e). Damit gilt also

$$\bar{A} \subset f^{-1}(C) = A \subset \bar{A} \Rightarrow A = \bar{A}.$$

Also folgt aus Satz 1.24.e), dass A abgeschlossen ist, was wir zeigen wollten. $\square$

Das Kriterium (iii) lässt sich als Verallgemeinerung der Folgenstetigkeit interpretieren, welche in metrischen Räumen äquivalent zu Stetigkeit ist. Apropos Folgen.

1.4 Folgen in topologischen Räumen

In der Analysis II wurde der Konvergenzbegriff von Zahlenfolgen auf Folgen in metrischen Räumen verallgemeinert. Genauer ist eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) konvergent gegen $x_0 \in X$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } d(x_n, x_0) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

wenn also jede offene ε -Kugel um x_0 *fast alle Folgenglieder* enthält. Mit diesem Ansatz lässt sich der Konvergenzbegriff auf topologische Räume verallgemeinern. Wie wir jedoch sehen werden, hat der Konvergenzbegriff für Folgen auf allgemeinen topologischen Räumen einige „Mängel“, welche zeigen, dass bei diesem Begriff Vorsicht geboten ist.

Definition 1.26. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert gegen x_0* , wenn jede Umgebung von x_0 fast alle Folgenglieder enthält, d.h. wenn für jede Umgebung U von x_0 gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } x_n \in U \quad \forall n \geq n_0.$$

Wir schreiben dann: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ und nennen x_0 den *Grenzwert von $(x_n)_n$* .

Ein wesentlicher Unterschied zu metrischen Räumen ist, dass der Grenzwert einer Folge im Allgemeinen *nicht eindeutig* sein muss.

Beispiel 1.27. Sei X eine nichtleere Menge, die mit der indiskreten Topologie versehen ist. Dann konvergiert *jede* Folge in X gegen *jeden* Punkt aus X .

Sei nämlich $(x_n)_n$ eine Folge in X und $x \in X$ beliebig. Die einzige Umgebung von x in der indiskreten Topologie ist X selbst. Da aber trivialerweise $x_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, enthält jede Umgebung von x alle Folgenglieder, also konvergiert $(x_n)_n$ gegen x .

Dieses Beispiel zeigt die skurrilen Eigenschaften der indiskreten Topologie. Betrachten wir etwa $\{0, 1\}$ mit der indiskreten Topologie, so konvergiert die Folge $(0, 0, 0, \dots)$ gegen 1 (und gegen 0).

Für metrische Räume wissen wir, dass der Abschluss einer Menge aus den Häufungspunkten dieser Menge besteht, dass es also für jeden Punkt im Abschluss eine Folge in der Menge gibt, die gegen diesen Punkt konvergiert. Auch diese Gleichheit gilt in allgemeinen topologischen Räumen nicht, eine der Inklusionen bleibt aber erhalten.

Satz 1.28. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A , die in X gegen $x_0 \in X$ konvergiert, so gilt $x_0 \in \bar{A}$.

Beweis. Nach Definition von Konvergenz gibt es für jede Umgebung U von x_0 ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$. Da die Folge in A liegt, folgt insbesondere, dass $U \cap A \neq \emptyset$ für jede solche Umgebung von x_0 . Also folgt aus Satz 1.23, dass $x_0 \in \bar{A}$. $\square$

Die umgekehrte Aussage ist in allgemeinen topologischen Räumen leider falsch, sondern benötigt eine zusätzliche Bedingung, die wir im Verlauf dieses Abschnitts besprechen werden.

In metrischen Räumen wurde die Stetigkeit von Abbildungen äquivalent mittels Konvergenz von Folgen definiert („Folgenstetigkeit“). Diese Äquivalenz gilt in allgemeinen topologischen Räumen *nicht* mehr, eine der beiden Richtungen bleibt jedoch gültig.

Satz 1.29. Seien X und Y topologische Räume und sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, die stetig in einem Punkt $x \in X$ ist. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige gegen x_0 konvergente Folge und sei V eine beliebige Umgebung von $f(x_0)$. Dann ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0 und es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in f^{-1}(V)$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann gilt jedoch auch, dass $f(x_n) \in V$ für alle $n \geq n_0$. Da V eine beliebige Umgebung von $f(x_0)$ war, folgt damit, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$. $\square$

Definition 1.30. Ein topologischer Raum X erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom* / ist *erstabzählbar*, wenn es zu jedem $x \in X$ eine abzählbare Familie $\mathcal{U}(x)$ von Umgebungen von x gibt, so dass es für jede Umgebung U von x ein $V \in \mathcal{U}(x)$ gibt mit $V \subset U$.

Beispiel 1.31. (1) Jeder metrische Raum (X, d) ist erstabzählbar. Ist nämlich $x \in X$, so betrachten wir

$$\mathcal{U}(x) = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ist dann U eine Umgebung von x , so gibt es nach Definition der von d induzierten Topologie ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$. Wählen wir dann $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$, so folgt $B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$. Also ist X erstabzählbar.

(2) Auf jeder Menge X sind die diskrete und die indiskrete Topologie erstabzählbar.

Satz 1.32. Sei X ein erstabzählbarer topologischer Raum und $A \subset X$. Dann ist

$$\bar{A} = \left\{ x \in X \mid \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \right\}.$$

Beweis. „ $\supset$ “ ist Satz 1.28, es bleibt also nur „ $\subset$ “ zu zeigen. Sei $x \in \bar{A}$ und sei $\mathcal{U}(x) = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von Umgebungen wie im ersten Abzählbarkeitsaxiom. Für jedes n setze

$$V_n := U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n.$$

Wie man leicht sieht, ist jedes V_n wieder eine Umgebung von x , außerdem ist $V_{n+1} \subset V_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.23 ist $V_n \cap A \neq \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wähle nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in V_n \cap A$ und betrachte die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A . Nach Konstruktion gilt dann für jedes $n_0 \in \mathbb{N}_0$, dass

$$x_n \in U_{n_0} \quad \forall n \geq n_0.$$

Ist nun U eine beliebige Umgebung von x , so gibt es nach Voraussetzung ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $U_{n_0} \subset U$, also gilt für dieses n_0 insbesondere, dass

$$x_n \in U \quad \forall n \geq n_0.$$

Also konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x , so dass x in der Menge auf der rechten Seite der behaupteten Gleichung liegt. $\square$

Satz 1.33. Seien X und Y topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $x \in X$. Nehme an, dass X erstabzählbar ist. Dann gilt: f ist genau dann stetig in x , wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “ ist Satz 1.29.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, die Konvergenzeigenschaft wäre in x erfüllt, f wäre aber in x nicht stetig. Dann gäbe es eine Umgebung V von $f(x)$, so dass $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x wäre. Dann würde umgekehrt für jede Umgebung U von x gelte, dass $f(U) \not\subset V$. Sei nun $\mathcal{U}(x) = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von Umgebungen von x wie im ersten Abzählbarkeitsaxiom und setze

$$V_n := U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Jedes V_n ist wieder eine Umgebung von x , also ist $f(V_n) \not\subset V$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wähle nun eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass $x_n \in V_n$ mit $f(x_n) \notin V$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Analog zum Beweis von Satz 1.32 ist dann $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, nach Konstruktion kann $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ aber nicht gegen $f(x)$ konvergieren. $\nmid$

Dies steht im Widerspruch zur Annahme. Also folgt die Behauptung. $\square$

Was wir aus diesem Abschnitt lernen können ist, dass der Begriff der Konvergenz von Folgen in allgemeinen topologischen Räumen nur unter Zusatzbedingungen aussagekräftig ist. Eine Folge ist eine *abzählbare* Familie von Elementen und diese Abzählbarkeit muss sich in der Topologie widerspiegeln.

Für allgemeine topologische Räume ist daher ein allgemeinerer Konvergenzbegriff notwendig, die Konvergenz von sogenannten *Netzen*, oder auch *Moore-Smith-Konvergenz*. Diese werden wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht behandeln und verweisen dafür auf Kapitel 5 im Buch von Querenburg oder Abschnitt 1.6 im Buch von Bredon.

Kapitel 2

Konstruktionen topologischer Räume

Dieses Kapitel steht unter dem Motto „Aus alt mach’ neu“ (für Hipster: Upcycling). Wir werden verschiedene Möglichkeiten sehen, wie sich aus gegebenen topologischen Räumen neue topologische Räume konstruieren lassen. Auf diese Weise werden wir interessante Beispiele kennenlernen und unterwegs einige weitere Grundbegriffe einführen.

2.1 Homöomorphismen

Aus der linearen Algebra kennen wir die Vorstellung eines Isomorphismus von Vektorräumen und haben zum Beispiel gelernt, dass jeder endlichdimensionale Vektorraum V isomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, wobei $n = \dim V$. Isomorphe Vektorräume haben alle wesentlichen Eigenschaften der linearen Algebra gemeinsam: Isomorphismen bilden Basen auf Basen ab, induzieren Isomorphismen zwischen den linearen Abbildungen der beiden Räume in einen beliebigen dritten Raum etc.

Wir wollen nun eine ähnliche Vorstellung für topologische Räume einführen, eine bijektive Abbildung, die abstrakt gesprochen die topologische Struktur von Räumen erhält.

Definition 2.1. Seien X und Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. f heißt *Homöomorphismus*, wenn f bijektiv ist und wenn sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.

X und Y heißen *homöomorph*, wenn es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt. (Kurznotation: $X \approx Y$.)

Bemerkung 2.2. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn für jedes $U \subset X$ gilt:

$$U \text{ ist offen in } X \quad \Leftrightarrow \quad f(U) \text{ ist offen in } Y.$$

Sind also X und Y homöomorph, so induziert also jeder Homöomorphismus eine Bijektion $\mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{T}_Y$. Beide Topologien können also miteinander identifiziert werden.

Beispiel 2.3. (1) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$S^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}.$$

die n -dimensionale Einheitskugel, d.h. die Oberfläche der $(n+1)$ -dimensionalen Einheitskugel. Sei

$$S_+^n := \{ (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > 0 \} = S^n \cap (\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$$

$$f : S_+^n \rightarrow B^n, \quad f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n).$$

Ist $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S_+^n$, so ist $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$. Da $x_{n+1} > 0$, ist dann $\sum_{i=1}^n x_i^2 < 1$, also ist f wohldefiniert. Weiter ist f offensichtlich stetig. Definieren wir

$$g : B^n \rightarrow S_+^n, \quad g(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right),$$

so sieht man leicht, dass g stetig ist. Weiter rechnet man nach, dass $f \circ g = \text{id}_{B^n}$ und $g \circ f = \text{id}_{S_+^n}$, also ist f bijektiv mit $f^{-1} = g$. Also ist f ein Homöomorphismus.

(2) Sind X und Y mit den diskreten Topologien versehen, so ist jede Bijektion $f : X \rightarrow Y$ eine Homöomorphismus.

(3) Sei B^n wieder die offene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$. Dann ist B^n homöomorph zu $\mathbb{R}^n$. Man betrachte nämlich die folgenden beiden Abbildungen:

$$\begin{aligned} F : B^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, & F(x) &= \frac{x}{1 - \|x\|}, \\ G : \mathbb{R}^n &\rightarrow B^n, & G(y) &= \frac{y}{1 + \|y\|}. \end{aligned}$$

F und G sind offensichtlich stetig. Weiterhin gilt für alle $x \in B^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$:

$$(G \circ F)(x) = G\left(\frac{x}{1 - \|x\|}\right) = \frac{x}{(1 - \|x\|)(1 + \|\frac{x}{1 - \|x\|}\|)} = \frac{x}{(1 - \|x\| + \|x\|)} = x,$$

$$(F \circ G)(y) = F\left(\frac{y}{1 + \|y\|}\right) = \frac{y}{(1 + \|y\|)(1 - \|\frac{y}{1 + \|y\|}\|)} = \frac{y}{1 - \|y\| + \|y\|} = y.$$

Damit ist F bijektiv mit $F^{-1} = G$. Also ist F ein Homöomorphismus.

(4) Es gibt stetige bijektive Abbildungen zwischen topologischen Räumen, die *keine* Homöomorphismen sind. Sei etwa $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis und betrachte die Abbildung

$$f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1, \quad f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Wir wissen aus Analysis II, dass f stetig und bijektiv ist. Die Umkehrabbildung ist jedoch nicht stetig: Sei $(x_n)_n$ eine Folge in $[0, 2\pi)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2\pi$ und sei $y_n := f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1, 0) = f(0),$$

andererseits ist jedoch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2\pi \neq 0 = f^{-1}(f(0)).$$

Also kann f^{-1} nach Satz 1.29 kein Homöomorphismus sein.

Wenn in der Topologie von *topologischen Eigenschaften* eines Raumes die Rede ist, so geht es um Eigenschaften, die von Homöomorphismen erhalten werden, d.h. sind X und Y homöomorph, so geht es um Eigenschaften, die X genau dann hat, wenn Y dieselbe Eigenschaft hat.

Eine der wichtigsten und elementarsten Fragen der Topologie ist daher die folgende: Wie lässt sich bei zwei gegebenen Räumen erkennen, ob sie homöomorph sind oder nicht? Diese Frage ist natürlich viel zu allgemein, um eine eindeutige klare Antwort zu geben, sie wird uns aber noch das gesamte Semester beschäftigen.

Wir beschließen den Abschnitt mit zwei neuen Begriffen, die insbesondere bei der Beschreibung von Homöomorphismen nützlich sind.

Definition 2.4. Seien X und Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$. f heißt *offen*, wenn für jedes offene $U \subset X$ die Menge $f(U)$ offen in Y ist. f heißt *abgeschlossen*, wenn für jedes abgeschlossene $A \subset X$ die Menge $f(A)$ abgeschlossen in Y ist.

Satz 2.5. Seien X und Y topologische Räume und sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist Homöomorphismus.
- (ii) f ist offen.
- (iii) f ist abgeschlossen.

Beweis. Dies ist unter Benutzung von Satz 1.25 leicht zu sehen und bleibe der Leserin oder dem Leser als Übung überlassen. $\square$

2.2 Unterräume und induzierte Topologien

Wir haben bereits in Beispiel 1.2.(3) gesehen, dass Teilmengen metrischer Räume wieder metrische Räume bilden. Diese Beobachtung wollen wir verallgemeinern und auf Teilmengen topologischer Räume wieder Topologien definieren.

Satz/Definition 2.6. Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subset X$. Setze

$$\mathcal{T}_A := \{U \cap A \mid U \text{ ist offen in } X\}.$$

Dann ist $\mathcal{T}_A$ eine Topologie auf A , die sogenannte Unterraumtopologie oder Teilraumtopologie.

Wir lassen den Beweis zunächst aus, da wir den Satz als Spezialfall eines allgemeineren Resultats erhalten werden.

Beispiel 2.7. (1) Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subset X$. Dann ist die Unterraumtopologie auf A als Unterraum von $(X, \mathcal{T}(d))$ gerade die Topologie, die von der Metrik $d|_{A \times A}$ induziert wird. (Übung.)

(2) Die Unterraumtopologie kann sich völlig anders verhalten als die ursprüngliche Topologie. Betrachte etwa $A := [0, 1] \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$ mit der Unterraumtopologie. Dann sind die Mengen $[0, 1]$ und $\{2\}$ offen in A , denn

$$[0, 1] = (-1, 2) \cap A, \quad \{2\} = (1, 3) \cap A,$$

und die Intervalle $(-1, 2)$ und $(1, 3)$ sind offen in $\mathbb{R}$.

Die Unterraumtopologie erhalten wir als Spezialfall der folgenden allgemeineren Konstruktion.

Satz/Definition 2.8. Sei X ein topologischer Raum, M eine Menge und $f : M \rightarrow X$ eine Abbildung. Dann ist durch

$$\mathcal{T}_f := \{f^{-1}(U) \mid U \text{ offen in } X\}$$

eine Topologie auf M definiert. Diese heißt die von f induzierte Topologie. Ist M mit dieser Topologie versehen, so ist f stetig.

Beweis. Die drei Eigenschaften einer Topologie folgen leicht aus der Kompatibilität von Urbildern mit Mengenoperationen:

- (i) Klar, da $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(X) = M$.
- (ii) Dies folgt leicht, da $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ für alle Familien $(U_i)_{i \in I}$.
- (iii) Dies gilt, da $f^{-1}(\bigcap_{i=1}^n U_i) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(U_i)$ für alle $U_1, \dots, U_n \subset X$.

Die Stetigkeit von f bezüglich dieser Topologie ist offensichtlich. □

Beweis von Satz/Definition 2.6. Dies ist ein Spezialfall von Satz/Definition 2.8, wenn wir $f : A \rightarrow X$, $f(x) = x$, die Inklusion von A betrachten. Hier ist klar, dass $f^{-1}(U) = U \cap A$ für alle $U \subset X$. □

Die von f induzierte Topologie ist also so konstruiert, dass sie als Mindestanforderung erfüllt, dass f stetig ist. Um dies zu formalisieren, führen wir einen neuen Begriff ein.

Definition 2.9. Sei X eine Menge und seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X . $\mathcal{T}_1$ heißt *größer als* $\mathcal{T}_2$, wenn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, d.h. wenn jede bzgl. $\mathcal{T}_1$ offene Menge auch offen bzgl. $\mathcal{T}_2$ ist. Umgekehrt heißt dann $\mathcal{T}_2$ *feiner als* $\mathcal{T}_1$.

Satz 2.10. Sei X ein topologischer Raum, M eine Menge und $f : M \rightarrow X$. Die von f induzierte Topologie $\mathcal{T}_f$ auf M ist die grösste Topologie auf M bezüglich der f stetig ist, d.h. ist $\mathcal{T}$ eine beliebige Topologie auf M bezüglich der f stetig ist, so ist $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}$.

Beweis. Dies ist klar. Ist $\mathcal{T}$ eine beliebige Topologie auf M und ist f stetig bezüglich $\mathcal{T}$, so ist $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ für jedes offene $U \subset X$. Nach Konstruktion von $\mathcal{T}_f$ ist daher $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}$. $\square$

Bevor wir mit anderen Konstruktionen weitermachen, führen wir eine weitere Möglichkeit ein, induzierte Topologien zu charakterisieren, nämlich über stetige Abbildungen. Der nächste Satz ist ein Beispiel einer *universellen Eigenschaft*. In topologischen Zusammenhang ist eine universelle Eigenschaft eine Eigenschaft, die einen topologischen Raum ausschliesslich durch seine stetigen Abbildungen charakterisiert.

Satz 2.11 (Universelle Eigenschaft der induzierten Topologie). Sei X ein topologischer Raum, M eine Menge und $f : M \rightarrow X$. Die von f induzierte Topologie ist die eindeutige Topologie mit der folgenden Eigenschaft:

Ist T ein topologischer Raum und $g : T \rightarrow M$ eine Abbildung, so ist g genau dann stetig, wenn $f \circ g : T \rightarrow X$ stetig ist.

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & M \\ & \searrow f \circ g & \downarrow f \\ & & X \end{array}$$

Beweis. Wir wollen zunächst nachweisen, dass $(M, \mathcal{T}_f)$ die besagte Eigenschaft hat:

„ $\Rightarrow$ “: Da nach Satz/Definition 2.8 die Abbildung f stetig bezüglich $\mathcal{T}_f$ ist, ist für stetiges g die Abbildung $f \circ g$ als Verkettung stetiger Abbildungen stetig.

„ $\Leftarrow$ “: Sei nun $g : T \rightarrow M$, so dass $f \circ g : T \rightarrow X$ stetig ist. Sei $U \subset M$ offen. Dann gibt es nach Definition von $\mathcal{T}_f$ ein offenes $V \subset X$ mit $U = f^{-1}(V)$. Damit folgt, dass

$$g^{-1}(U) = g^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ g)^{-1}(V)$$

offen ist, da $f \circ g$ stetig ist. Also ist auch g stetig.

Nun zur Eindeutigkeit. Sei $\mathcal{T}$ eine weitere Topologie auf M mit der obigen Eigenschaft. Wähle für diese Eigenschaft dann $T = (M, \mathcal{T})$ und $g = \text{id}_M : T \rightarrow T$. g ist trivialerweise stetig, also ist nach obiger Eigenschaft f stetig bezüglich $\mathcal{T}$. Also gilt nach Satz 2.10, dass $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}$.

Betrachte nun $T' = (M, \mathcal{T}_f)$ und die Abbildung $g' = \text{id}_M : T' \rightarrow M$, die als Abbildung zwischen Mengen wieder die Identität ist, als Abbildung zwischen topologischen Räumen aber unterschiedliche Topologien betrachtet.) Dann ist $f \circ g' : T' \rightarrow X$ auf den

unterliegenden Mengen gerade $f : M \rightarrow X$, also bezüglich $\mathcal{T}_f$ stetig. Damit ist nach obiger Eigenschaft auch g' selbst stetig. Dies heißt aber, dass $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$, also haben wir gezeigt, dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$, woraus die Eindeutigkeit folgt. $\square$

Im folgenden gelte die Konvention: Betrachten wir eine Teilmenge eines topologischen Raumes und definieren keine explizite Topologie auf ihr, so betrachten wir die Teilmenge mit der Unterraumtopologie.

Definition 2.12. Seien X und Y topologische Räume. Eine injektive stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *Einbettung*, wenn die Topologie auf X die von f induzierte ist. Ist f eine Einbettung, so schreibt man auch $f : X \hookrightarrow Y$.

Wir können mit diesem Begriff die Unterraumtopologie wie folgt umformulieren:

Ist X ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und $i : A \rightarrow X$ die Inklusion, so ist die Unterraumtopologie A gerade die Topologie, für die i eine Einbettung ist.

2.3 Produkttopologien

Dieser Abschnitt hat ein einfaches Ziel: Wir wollen zeigen, dass das Produkt von topologischen Räumen stets wieder eine Topologie besitzt, die sich so bezüglich der Topologien auf den Faktoren verhält, wie man es erwarten würde. Dies werden wir weiter unten präzisieren und führen zunächst weitere Grundbegriffe ein.

Definition 2.13. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

- (1) Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt *Basis von $\mathcal{T}$* , wenn jedes $U \in \mathcal{T}$ als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ gegeben ist.
- (2) Ein Mengensystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ heißt *Subbasis von $\mathcal{T}$* , wenn durch

$$\{U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}, U_1, \dots, U_n \in \mathcal{S}\} \quad (2.1)$$

eine Basis von $\mathcal{T}$ gegeben ist, wenn also jedes $U \in \mathcal{T}$ als Vereinigung endlicher Schnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$ gegeben ist.

Bemerkung 2.14. (1) Jede Basis eines topologischen Raumes ist auch eine Subbasis des topologischen Raumes, die Umkehrung gilt nicht.

- (2) Basen und Subbasen sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

Satz/Definition 2.15. Sei X eine Menge und $\mathcal{S} \subset \mathfrak{P}(X)$ mit $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U = X$. Sei $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(X)$ die Menge bestehend aus $\emptyset$ und allen Vereinigungen von Mengen aus

$$\{U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}, U_1, \dots, U_n \in \mathcal{S}\}.$$

Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X mit Subbasis $\mathcal{S}$ und heißt die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie.

Der Beweis ist nicht schwer und wird daher ausgelassen. Die Voraussetzung $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U = X$ wird benötigt, da ansonsten X selbst nicht in der Topologie liegen würde.

Beispiel 2.16. (1) Ist (X, d) metrischer Raum, so ist eine Basis von $\mathcal{T}(d)$ gegeben durch

$$\{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}.$$

Ist nämlich $U \in \mathcal{T}(d)$, so gibt es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $B_{\varepsilon_x}(x) \subset U$ und man folgert leicht, dass $U = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x)$.

(2) Eine Basis der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ ist gegeben durch die Menge der endlichen offenen Intervalle

$$\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Eine Subbasis der Standardtopologie $\mathbb{R}$ ist gegeben durch die Menge der semi-unendlichen offenen Intervalle

$$\{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\},$$

da jedes endliche offene Intervall offensichtlich als Schnitt zweier solcher Intervalle geschrieben werden kann.

Satz 2.17. Seien X und Y topologische Räume, sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie auf Y und sei $f : X \rightarrow Y$. Dann gilt: f ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(U)$ für jedes $U \in \mathcal{S}$ offen in X ist.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Klar.

„ $\Leftarrow$ “: Sei $\mathcal{B} := \{U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}, U_1, \dots, U_n \in \mathcal{S}\}$. Dann gilt nach den Eigenschaften einer Topologie für jedes $U = U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{B}$, dass

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(U_1 \cap \dots \cap U_n) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(U_i)$$

offen in X ist. Nach Annahme kann jedes offene $U \subset Y$ geschrieben werden als $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ für geeignetes I und $U_i \in \mathcal{B}$ für alle $i \in I$. Nach den Eigenschaften einer Topologie ist dann

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$$

wieder offen in X . Also ist f stetig. □

Definition 2.18. Sei I eine beliebige Menge und $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Für jedes $j \in I$ sei

$$\text{pr}_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j, \quad \text{pr}_j((x_i)_{i \in I}) = x_j,$$

die Projektion auf den Faktor X_j . Sei

$$\mathcal{S} := \bigcup_{j \in I} \left\{ \text{pr}_j^{-1}(U) \subset \prod_{i \in I} X_i \mid U \in \mathcal{T}_j \right\}.$$

Die von $\mathcal{S}$ induzierte Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ heißt *Produkttopologie*.

Bemerkung 2.19. Man überlege sich anhand von Definition 2.18, dass folgende Menge eine Basis der Produkttopologie ist:

$$\left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \text{ ist offen in } X_i \forall i \in I, U_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I \right\}.$$

Auf den ersten Blick sieht diese Topologie unnötig kompliziert aus. Ein naiver erster Zugang wäre die Idee, die Topologie $\mathcal{T}_{\text{Box}}$ zu nehmen, die von der Basis

$$\left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \text{ ist offen in } X_i \forall i \in I \right\}$$

erzeugt wird. Diese Topologie nennt man auch *Boxtopologie*. Wie wir jedoch im Verlauf der Vorlesung noch sehen werden, stellt sich heraus, dass die Boxtopologie viele unschöne Eigenschaften hat, so dass die Produkttopologie sich als die „natürliche“ Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ herausstellen wird (beachte hierzu auch die universelle Eigenschaft in Satz 2.21).

Insbesondere ist die Boxtopologie *feiner* als die Produkttopologie. Betrachten wir zum Beispiel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$, so ist $\prod_{n \in \mathbb{N}} (0, 1)$ offen in der Boxtopologie, aber nicht in der Produkttopologie.

Für endliche Produkte $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ topologischer Räume stimmen die beiden Topologien jedoch überein, dann ist

$$\{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \mid U_i \text{ ist offen in } X_i \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

eine Basis der Produkttopologie.

Analog zur Unterraumtopologie können wir die Produkttopologie ebenfalls durch stetige Abbildungen charakterisieren.

Satz 2.20. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die Produkttopologie ist die größte Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$, für die $\text{pr}_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ für jedes $j \in I$ stetig ist.

Beweis. Es bezeichne $\mathcal{T}_{\Pi}$ die Produkttopologie auf $\prod_{i \in I} X_i$. Zunächst ist klar, dass jedes pr_j stetig bezüglich $\mathcal{T}_{\Pi}$ ist, da in der obigen Notation für jedes offene $U \subset X_j$ gilt, dass $\text{pr}_j^{-1}(U) \in \mathcal{S} \subset \mathcal{T}_{\Pi}$.

Sei nun $\mathcal{T}$ eine weitere Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$, so dass jedes pr_j stetig bezüglich $\mathcal{T}$ ist. Dann gilt für jedes offene $U \subset X_j$ gilt, dass $\text{pr}_j^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Nach den Eigenschaften einer Topologie muss dann jedoch jede Vereinigung endlicher Schnitte von Mengen der Form $\text{pr}_j^{-1}(U)$ wieder in $\mathcal{T}$ liegen, also folgt nach Konstruktion von $\mathcal{T}_{\Pi}$, dass $\mathcal{T}_{\Pi} \subset \mathcal{T}$. $\square$

Satz 2.21 (Universelle Eigenschaft der Produkttopologie). Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die Produkttopologie ist die einzige Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ mit der folgenden Eigenschaft:

Für jeden topologischen Raum T und jede Abbildung $g : T \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ ist g genau dann stetig, wenn $\text{pr}_j \circ g$ für jedes $j \in I$ stetig ist.

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & \prod_{i \in I} X_i \\ & \searrow \text{pr}_j \circ g & \downarrow \text{pr}_j \\ & & X_j \end{array}$$

Beweis. (Dies lässt sich analog zur universellen Eigenschaft der Unterraumtopologie beweisen.)

Sei wieder $\mathcal{T}_\Pi$ die Produkttopologie auf $X := \prod_{i \in I} X_i$ und sei $\mathcal{S}$ gegeben wie in Definition 2.18. Wir wollen zunächst zeigen, dass $\mathcal{T}_\Pi$ die besagte Eigenschaft hat.

„ $\Rightarrow$ “ folgt direkt aus Satz 2.20.

„ $\Leftarrow$ “: Sei nun $g : T \rightarrow X$, so dass $\text{pr}_j \circ g : T \rightarrow X_j$ stetig ist. Nach Satz 2.17 reicht es zu zeigen, dass $f^{-1}(V)$ für jedes $V \in \mathcal{S}$ offen in R ist. Für jedes solche V gibt es $j \in I$ und $U \subset X_j$ offen, so dass $V = \text{pr}_j^{-1}(U)$. Damit folgt, dass

$$g^{-1}(U) = g^{-1}(\text{pr}_j^{-1}(U)) = (\text{pr}_j \circ g)^{-1}(U)$$

offen ist, da $\text{pr}_j \circ g$ nach Annahme stetig ist. Also ist auch g stetig.

Nun zur Eindeutigkeit. Sei $\mathcal{T}$ eine weitere Topologie auf X mit der obigen Eigenschaft. Wähle für diese Eigenschaft dann $T = (X, \mathcal{T})$ und $g = \text{id}_X : T \rightarrow X$. g ist trivialerweise stetig bezüglich g , also ist nach obiger Eigenschaft pr_j stetig bezüglich $\mathcal{T}$. Also gilt nach Satz 2.20, dass $\mathcal{T}_\Pi \subset \mathcal{T}$.

Betrachte nun $T' = (X, \mathcal{T}_\Pi)$ und $g' = \text{id}_X : T' \rightarrow X$, (die als Abbildung zwischen Mengen wieder die Identität ist, als Abbildung zwischen topologischen Räumen aber unterschiedliche Topologien betrachtet). Dann ist $\text{pr}_j \circ g' = \text{pr}_j : T' \rightarrow X_j$ stetig für jedes $j \in I$ nach Konstruktion von $\mathcal{T}_\Pi$, also ist nach obiger Eigenschaft auch g' selbst stetig. Dies heißt aber, dass $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\Pi$, also haben wir gezeigt, dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\Pi$, was zu zeigen war. $\square$

Sind zwei metrische Räume gegeben, so lässt sich auf dem Produkt der beiden Räume wieder eine Metrik definieren. In diesem Fall induziert die Produktmetrik tatsächlich stets die Produkttopologie.

Satz 2.22. Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume und betrachte die von d_1 und d_2 induzierten Topologien auf X_1 und X_2 . Dann ist die Produkttopologie auf $X := X_1 \times X_2$ gerade die Topologie, die von der Produktmetrik

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\},$$

erzeugt wird.

Beweis. Dies ist Aufgabe 2 auf Übungsblatt 2. $\square$

2.4 Quotientenräume und koinduzierte Topologien

In Abschnitt 2.2 haben wir den Fall betrachtet, dass eine Abbildung $f : M \rightarrow X$ zwischen einer Menge M und einem topologischen Raum X gegeben ist und mit Hilfe von f und der Topologie auf X eine Topologie auf M definiert. Nun wollen wir den „umgekehrten“ Fall betrachten und erneut eine Topologie auf M definieren, die die Mindestanforderung erfüllt, dass f stetig ist.

Satz/Definition 2.23. Sei X ein topologischer Raum, M eine Menge und $f : X \rightarrow M$ eine Abbildung. Dann ist

$$\mathcal{T}^f := \{U \subset M \mid f^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\}$$

eine Topologie auf M . Diese heißt die von f koinduzierte Topologie. Ist M mit dieser Topologie versehen, so ist f stetig.

Beweis. Die Topologie-Eigenschaften von $\mathcal{T}^f$ folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von X und der Kompatibilität von Urbildern mit Mengenoperationen. Die Stetigkeit von f ist offensichtlich. $\square$

Beispiel 2.24. (1) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{R}P^n = \{L \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid L \text{ ist Ursprungsgerade}\}$. Betrachte $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ als Unterraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ und sei

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad f(v) = \mathbb{R}v.$$

$\mathbb{R}P^n$ mit der von f koinduzierten Topologie heißt der n -dimensionale reell-projektive Raum.

(2) Analog sei $\mathbb{C}P^n = \{L \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid L \text{ ist komplexe Ursprungsgerade}\}$. Betrachte $\mathbb{C}^{n+1}$ mit der euklidischen Topologie und sei

$$g : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n, \quad g(v) = \mathbb{C}v.$$

$\mathbb{C}P^n$ mit der von g koinduzierten Topologie heißt der n -dimensionale komplex-projektive Raum.

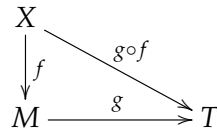
Die folgenden abstrakten Charakterisierungen koinduzierter Topologien sind analog zu denen induzierter Topologien in Abschnitt 2.2.

Satz 2.25. Sei X ein topologischer Raum, M eine Menge und $f : X \rightarrow M$. Die von f koinduzierte Topologie $\mathcal{T}^f$ auf M ist die feinste Topologie auf M bezüglich der f stetig ist.

Beweis. Dies ist klar. $\square$

Satz 2.26 (Universelle Eigenschaft der koinduzierten Topologie). Sei X ein topologischer Raum, M eine Menge und $f : X \rightarrow M$. Die von f koinduzierte Topologie ist die eindeutige Topologie auf M mit der folgenden Eigenschaft:

Ist T ein topologischer Raum und $g : M \rightarrow T$ eine Abbildung, so ist g genau dann stetig, wenn $g \circ f : X \rightarrow T$ stetig ist.



Beweis. Wir rechnen zunächst nach, dass die koinduzierte Topologie die entsprechende Eigenschaft hat:

„ $\Rightarrow$ “: Dies folgt aus Satz 2.25.

„ $\Leftarrow$ “: Ist $g \circ f$ stetig und $U \subset T$ offen, so ist $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ offen in X . Nach Definition der koinduzierten Topologie ist damit aber $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}^f$. Also ist g stetig.

Für den Beweis der Eindeutigkeit sei $\mathcal{T}$ eine weitere Topologie auf M mit der obigen Eigenschaft. Wähle in obigem Diagramm dann $T = (M, \mathcal{T})$ und $g = \text{id}_M : (M, \mathcal{T}) \rightarrow (M, \mathcal{T})$. Da g stetig, ist dann f stetig bezüglich $\mathcal{T}$, also gilt nach Satz 2.25, dass $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^f$. Betrachten wir nun $g' = \text{id}_M : (M, \mathcal{T}) \rightarrow (M, \mathcal{T}^f)$, die als Abbildung zwischen Mengen die Identität ist, so ist $g' \circ f = f : X \rightarrow (M, \mathcal{T}^f)$ wie gerade gezeigt stetig, also ist nach der angenommenen Eigenschaft auch g' stetig. Das heißt aber, dass $\mathcal{T}^f \subset \mathcal{T}$ und damit $\mathcal{T} = \mathcal{T}^f$. $\square$

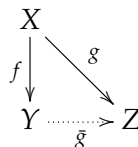
Bemerkung 2.27. Man beachte, dass sich die universelle Eigenschaften von induzierter und koinduzierter Pfeile sehr ähneln. Genauer erhält man im Diagramm die eine aus der anderen durch „Umdrehen aller Pfeile“.

Koinduzierte Topologien werden vor allem für surjektive Abbildungen betrachtet. Wir geben diesem Fall deshalb einen eigenen Namen.

Definition 2.28. Seien X und Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Ist f surjektiv und Y mit der von f koinduzierten Topologie versehen, so heißt f *Identifizierungsabbildung* oder kurz *Identifizierung*.

Die nächste Folgerung aus der universellen Eigenschaft wird häufig in konkreten Situationen benutzt, wir wollen sie deshalb explizit festhalten.

Korollar 2.29. Seien X, Y und Z topologische Räume, sei $f : X \rightarrow Y$ eine Identifizierung und sei $g : X \rightarrow Z$ stetig. Wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ gilt, dass $g(x_1) = g(x_2)$, so gibt es eine eindeutige stetige Abbildung $\bar{g} : Y \rightarrow Z$ mit $g = \bar{g} \circ f$.



Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit einer eindeutigen Abbildung $\bar{g}$ mit $g = \bar{g} \circ f$ folgt mit elementarer Mengenlehre. (Man beachte, dass für die Eindeutigkeit die Surjektivität von f benötigt wird.) Da g nach Annahme stetig ist, folgt die Stetigkeit von $\bar{g}$ aus der universellen Eigenschaft der koinduzierten Topologie. $\square$

Um festzustellen, dass eine Abbildung eine Identifizierung ist, zieht man oft das folgende Kriterium heran.

Satz 2.30. Seien X und Y topologische Räume und sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und surjektiv. Ist f offen oder abgeschlossen, so ist f eine Identifizierung.

Beweis. Sei $\mathcal{T}$ die gegebene Topologie auf Y . Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}^f$. Da f stetig ist, gilt für jedes $V \in \mathcal{T}$, dass $f^{-1}(V)$ offen ist, also ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^f$.

Sei $V \in \mathcal{T}^f$ beliebig. Dann ist nach Definition von $\mathcal{T}^f$ die Menge $f^{-1}(V)$ offen in X . Da f surjektiv ist, ist $f(f^{-1}(V)) = V$. Ist f offen, so folgt daraus, dass $V \in \mathcal{T}$.

Ist f abgeschlossen, so folgert man analog, dass $f(f^{-1}(Y \setminus V)) = Y \setminus V$ abgeschlossen und damit V offen in Y ist. In beiden Fällen folgt, dass $\mathcal{T}^f = \mathcal{T}$, was zu zeigen war. $\square$

Für Identifizierungen gilt der folgende Eindeutigkeitssatz.

Satz 2.31. Seien X, Y_1 und Y_2 topologische Räume und seien $f_1 : X \rightarrow Y_1$ und $f_2 : X \rightarrow Y_2$ Identifizierungen. Angenommen, es gelte für alle $x, x' \in X$, dass $f_1(x) = f_1(x')$ genau dann, wenn $f_2(x) = f_2(x')$. Dann sind Y_1 und Y_2 homöomorph und es gibt einen eindeutigen Homöomorphismus $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ mit $\varphi \circ f_1 = f_2$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \\ f_2 \downarrow & \approx & \swarrow \varphi \\ & & Y_2 \end{array}$$

Beweis. Nach Korollar 2.29 induzieren f_1 und f_2 stetige Abbildungen $\bar{f}_1 : Y_2 \rightarrow Y_1$ und $\bar{f}_2 : Y_1 \rightarrow Y_2$, für die folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ f_2 \downarrow & \searrow f_1 & f_1 \downarrow & \searrow f_2 \\ Y_2 & \xrightarrow{\bar{f}_1} & Y_1 & & Y_1 & \xrightarrow{\bar{f}_2} & Y_2 \end{array}$$

Setzen wir $g := \bar{f}_1 \circ \bar{f}_2 : Y_1 \rightarrow Y_1$, so folgt aus der Kommutativität der Diagramme, dass

$$g \circ f_1 = \bar{f}_1 \circ \bar{f}_2 \circ f_1 = \bar{f}_1 \circ f_2 = f_1,$$

also kommutiert auch

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ f_1 \downarrow & \searrow f_1 & \\ Y_1 & \xrightarrow{g} & Y_1 \end{array}$$

Ersetzen wir g durch id_{Y_1} , so erhalten wir ebenfalls ein kommutatives Diagramm. Nach Korollar 2.29 ist die Abbildung, die das Diagramm kommutieren lässt, jedoch eindeutig, also folgt $\text{id}_{Y_1} = g = \bar{f}_1 \circ \bar{f}_2$. Analog zeigt man $\bar{f}_2 \circ \bar{f}_1 = \text{id}_{Y_2}$, also erhalten wir den gewünschten Homöomorphismus durch $\varphi = \bar{f}_2$. $\square$

Eine typische Anwendung der koinduzierten Topologie ist, Quotienten von topologischen Räumen wieder mit Topologien zu versehen.

Definition 2.32. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $p : X \rightarrow X/\sim$ die Abbildung, die jedem Element seine Äquivalenzklasse zuordnet. Die von p koinduzierte Topologie

$$\mathcal{T}^p = \{U \subset X/\sim \mid p^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

auf $X/\sim$ wird *Quotiententopologie* genannt. $(X/\sim, \mathcal{T}^p)$ heißt ein *Quotientenraum* von X und p heißt (*kanonische*) *Projektion*.

Es ist klar, dass die kanonische Projektion auf den Quotientenraum eine Identifizierung ist. Das nächste Resultat zeigt, dass wir jede koinduzierte Topologie einer surjektiven Abbildung als Quotiententopologie betrachten können.

Korollar 2.33. Seien X und Y topologische Räume und sei $f : X \rightarrow Y$ eine Identifizierung. Definiere eine Äquivalenzrelation auf X durch

$$x \sim_f x' \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) = f(x').$$

Dann ist $X/\sim_f$ homöomorph zu Y .

Beweis. Wende Satz 2.31 an auf $f_1 = f$ und $f_2 : X \rightarrow X/\sim_f$ die kanonische Projektion. $\square$

Beispiel 2.34. (1) Betrachte auf $[0, 1]$ die Äquivalenzrelation, die durch $0 \sim 1$ definiert wird. Betrachte dann die Abbildung

$$f : [0, 1] \rightarrow S^1, \quad f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

f ist offensichtlich surjektiv und stetig und stimmt mit der Einschränkung der Polarkoordinatenabbildung $F : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ auf $\{1\} \times [0, 1]$ überein. Aus der Analysis II wissen wir, dass F eine offene Abbildung ist. Daraus folgert man, dass f eine offene Abbildung bezüglich der Unterraumtopologien ist, also ist f nach Satz 2.30 eine Identifizierung. Da $\sim$ in der Notation von Korollar 2.33 mit $\sim_f$ übereinstimmt, folgt aus diesem Korollar, dass $S^1 \approx [0, 1]/\sim$.

(2) Wenden wir Korollar 2.33 auf die Abbildungen aus Beispiel 2.24 an, so erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^n &\approx (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim, \quad \text{wobei } x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \lambda x = y, \\ \mathbb{C}P^n &\approx (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim', \quad \text{wobei } x \sim' y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \lambda x = y. \end{aligned}$$

(3) Sei $n \in \mathbb{N}$ und betrachte auf S^n die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \iff y \in \{x, -x\}.$$

Dann ist $\mathbb{R}P^n \approx S^n / \sim$. (Dies ist Übungsaufgabe 1 von Blatt 3.)

Beispiel 2.35. (Quotientenräume von $[0, 1]^2$)

In diesem Beispiel wollen wir Ränder des Quadrats $[0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ durch Quotientenbildung miteinander verkleben und die Räume betrachten, die wir auf diese Weise herausbekommen. Die folgenden vier Relationen sind in Abbildung 2.1 skizziert.

(1) Betrachte die Äquivalenzrelation $\sim_1$ auf $[0, 1]^2$, die durch Reflexivität und durch

$$(0, t) \sim_1 (1, t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

definiert wird. Das Resultat ist ein „geschlossener Streifen“, der zu $[0, 1] \times S^1$ homöomorph ist. Dies zeigt man, indem man Satz 2.31 auf die Projektion $\pi : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2 / \sim_1$ und die Abbildung $f \times \text{id}_{[0, 1]} : [0, 1]^2 \rightarrow S^1 \times [0, 1]$ anwendet, wobei f wie in Beispiel 2.34.(1) definiert sei. Hierzu muss man zeigen, dass $f \times \text{id}_{[0, 1]}$ eine Identifizierung ist, was wir in Satz 4.31 beweisen werden.

(2) Sei $\sim_2$ auf $[0, 1]^2$ durch Reflexivität und durch

$$(0, t) \sim_2 (1, 1 - t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

definiert. Der Quotientenraum $M := [0, 1]^2 / \sim_2$ heißt *Möbiusband*.

(3) Wir untersuchen nun die Äquivalenzrelation $\sim_3$ auf $[0, 1]^2$, die durch Reflexivität und durch

$$(0, t) \sim_3 (1, t) \quad \forall t \in [0, 1], \quad (s, 0) \sim_3 (s, 1) \quad \forall s \in [0, 1],$$

gegeben ist. Der Quotientenraum $[0, 1]^2 / \sim_3$ ist homöomorph zum 2-Torus $T^2 := S^1 \times S^1$. Dies zeigt man durch Anwendung von Satz 2.31 auf die Projektion $\pi : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2 / \sim_3$ und $f \times f : [0, 1]^2 \rightarrow S^1 \times S^1$, wobei f wieder wie in Beispiel 2.34.(1) definiert sei. Auch dies werden wir in Satz 4.31 beweisen.

(4) Schließlich sei $\sim_4$ auf $[0, 1]^2$ durch Reflexivität und durch

$$(0, t) \sim_4 (1, 1 - t) \quad \forall t \in [0, 1], \quad (s, 0) \sim_4 (s, 1) \quad \forall s \in [0, 1]$$

definiert. Der Quotientenraum $K := [0, 1]^2 / \sim_4$ heißt *Kleinsche Flasche*. In der Geometrie von Flächen spielt diese eine wichtige Rolle. Sie ist das einfachste Beispiel einer geschlossenen nichtorientierbaren Fläche.

Eine besondere Art von Quotientenraumbildung, die in der Topologie eine wichtige Rolle spielt, bekommt eine besondere Notation.

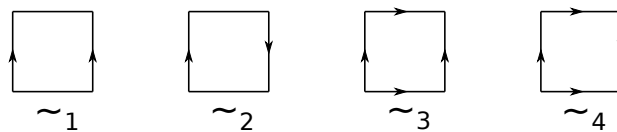


Abbildung 2.1: Die vier Äquivalenzrelationen aus Beispiel 2.35.

Definition 2.36. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ mit $A \neq \emptyset$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf X durch

$$x \sim_A y \quad :\Leftrightarrow \quad x, y \in A \quad \vee \quad x = y.$$

Dann nennen wir

$$X/A := X/\sim_A$$

den durch *Zusammenschlagen von A* oder *Kollabieren von A* gebildeten Quotientenraum.

Anschaulich werden in X/A alle Elemente aus A mit einem Punkt identifiziert und keine weiteren Identifikationen gebildet. Im folgenden Satz sehen wir ein wichtiges und anschauliches Beispiel dafür, wie das Kollabieren von Teilmengen funktioniert.

Beispiel 2.37. Sei $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$D^n/S^{n-1} \approx S^n.$$

Dies werden wir zu einem späteren Zeitpunkt beweisen. Man kann sich die Behauptung jedoch für $n = 2$ anschaulich schon gut an einer Skizze klarmachen.

2.5 Summen topologischer Räume

Definition 2.38. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die *Summe* oder *disjunkte Vereinigung* von $(X_i)_{i \in I}$ ist die Menge

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i := \bigcup_{i \in I} \{(x, i) \mid i \in I, x \in X_i\}.$$

Anschaulich legen wir in der disjunkten Vereinigung mehrere Räume nebeneinander.

Satz/Definition 2.39. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Dann ist auf $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ eine Topologie gegeben durch

$$\tau_{\sqcup} := \left\{ \bigsqcup_{i \in I} U_i := \bigcup_{i \in I} U_i \times \{i\} \mid U_i \text{ ist offen in } X_i \forall i \in I \right\}.$$

$\tau_{\sqcup}$ heißt die Summentopologie und $(\bigsqcup_{i \in I} X_i, \tau_{\sqcup})$ heißt die topologische Summe von $(X_i)_{i \in I}$.

Wie auch die anderen Konstruktionen in diesem Kapitel lässt sich die topologische Summe wieder durch abstrakte Eigenschaften charakterisieren.

Satz 2.40. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Für jedes $j \in I$ sei $f_j : X_j \rightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$, $f_j(x) = (x, j)$. Die Summentopologie ist die feinste Topologie auf $\bigsqcup_{i \in I} X_i$, für die f_j für alle $j \in I$ stetig ist.

Satz 2.41 (Universelle Eigenschaft der Summentopologie). Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Für jedes $j \in I$ sei $f_j : X_j \rightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$, $f_j(x) = (x, j)$. Die Summentopologie ist die eindeutige Topologie auf $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ mit der folgenden Eigenschaft:

Ist T ein topologischer Raum und $g : \bigsqcup_{i \in I} X_i \rightarrow T$, so ist g genau dann stetig, wenn $g \circ f_j : X_j \rightarrow T$ für jedes $j \in I$ stetig ist.

$$\begin{array}{ccc} X_j & & \\ \downarrow f_j & \searrow g \circ f_j & \\ \bigsqcup_{i \in I} X_i & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

Die Beweise der letzten beiden Sätze verlaufen analog zu den Beweisen der anderen universellen Eigenschaften in diesem Kapitel, wir lassen sie deshalb aus. In topologischen Summen finden wir unter anderem echte nichtleere Teilmengen, die offen und abgeschlossen sind.

Satz 2.42. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Für $j \in I$ sei $f_j : X_j \rightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$ definiert wie in Satz 2.41. Dann ist $f_j(X_j)$ offen und abgeschlossen in der topologischen Summe $\bigsqcup_{i \in I} X_i$.

Beweis. Wir können $f_j(X_j)$ schreiben als $\bigsqcup_{i \in I} U_i$, wobei

$$U_i = \begin{cases} X_j & \text{falls } i = j, \\ \emptyset & \text{falls } i \neq j, \end{cases}$$

also ist X_j offen in der topologischen Summe. Weiter ist

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i \setminus f_j(X_j) = \bigsqcup_{i \in I} V_i, \quad \text{wobei } V_i = \begin{cases} X_i & \text{falls } i \neq j, \\ \emptyset & \text{falls } i = j, \end{cases}$$

also ist $\bigsqcup_{i \in I} X_i \setminus f_j(X_j)$ offen und damit $f_j(X_j)$ abgeschlossen in der topologischen Summe. $\square$

Topologische Summen und Quotientenbildung lassen sich häufig gut miteinander kombinieren (wie wir im folgenden Abschnitt noch sehen werden). Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei interessanten Beispielen dafür.

Beispiel 2.43. (1) (Einpunktvereinigung)

Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Die Einpunktvereinigung von (X, x_0) und (Y, y_0) ist der Quotientenraum

$$X \vee Y := (X \sqcup Y) / (\{x_0\} \sqcup \{y_0\}) = (X \sqcup Y) / \sim,$$

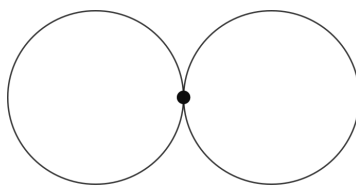


Abbildung 2.2: Die Einpunktvereinigung $S^1 \vee S^1$.

wobei $\sim$ durch Reflexivität und durch $x_0 \sim y_0$ definiert sei. Wir kleben also X und Y an den Punkten x_0 und y_0 aneinander. Abbildung 2.2 zeigt ein Bild von $S^1 \vee S^1$.

(2) (Die Gerade mit zwei Ursprüngen)

In Abschnitt 1.4 hatten wir am Beispiel der indiskreten Topologie gesehen, dass Grenzwerte von Folgen in topologischen Räumen nicht eindeutig sein müssen. Wir wollen nun eine etwas feinere Topologie konstruieren, in der Grenzwerte nicht eindeutig sind. Auf der topologischen Summe

$$\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

definieren wir eine Äquivalenzrelation durch

$$(x, i) \sim (y, j) :\Leftrightarrow x = y, x \neq 0 \vee (x, i) = (y, j).$$

Sei $L := (\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) / \sim$ mit der Quotiententopologie versehen und $p : \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \rightarrow L$ die Projektion. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $(0, +\infty)$ die gegen 0 konvergiert und betrachte die Folge $(p(x_n, 0))_{n \in \mathbb{N}}$. Da $p(x_n, 0) = p(x_n, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, lässt sich zeigen, dass $(p(x_n, 0))_{n \in \mathbb{N}}$ sowohl gegen $p(0, 0)$ als auch gegen $p(0, 1)$ konvergiert, welche nicht übereinstimmen. Also ist der Grenzwert der Folge nicht eindeutig.

2.6 Pushouts und Pullbacks

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst eine allgemeine Vorstellung für das *Verkleben von Räumen* entwickeln. Zwei einfache Beispiele dafür haben wir im letzten Abschnitt gesehen, die Einpunktvereinigung verklebt beispielsweise zwei Räume an jeweils einem Punkt miteinander. Wir beginnen mit einer sehr allgemeinen Definition.

Definition 2.44. Seien A , X und Y topologische Räume, $f : A \rightarrow X$ und $g : A \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Betrachte auf der topologischen Summe $X \sqcup Y$ die kleinste¹ Äquivalenzrelation, für die für alle $x \in X$, $y \in Y$ gilt, dass

$$x \sim y, \quad \text{wenn } \exists a \in A, \text{ so dass } x = f(a), \quad y = g(a).$$

¹Hierbei ist „kleinste“ in dem Sinne gemeint, dass Relationen auf einer Menge M als Teilmengen von $M \times M$ gegeben sind. Die *kleinste* Äquivalenzrelation, die eine bestimmte Teilmenge von $M \times M$ enthält, ist dann gegeben als Schnittmenge aller Äquivalenzrelationen mit dieser Eigenschaft.

Der Quotientenraum $X \cup_A Y := (X \sqcup Y) / \sim$ heißt *Pushout von $f : A \rightarrow X$ und $g : A \rightarrow Y$* .
(Kurzschreibweise: Pushout von $X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} Y$.)

Für uns ist vor allem der Spezialfall interessant, in dem eine der beiden Abbildungen im Pushout die Inklusion eines Unterraums ist.

Definition 2.45. Seien X und Y topologische Räume und sei $A \subset X$ mit der Unterraumtopologie versehen. Für eine stetige Abbildung $f : A \rightarrow Y$ betrachten wir auf $X \sqcup Y$ die durch $x \sim_f f(x)$ für alle $x \in A$ definierte Äquivalenzrelation und den Quotientenraum

$$X \cup_f Y := (X \sqcup Y) / \sim_f.$$

$X \cup_f Y$ heißt *die Verklebung von X und Y mittels f* oder auch *der durch Zusammenkleben von X und Y mittels f entstandene Raum*.

Bemerkung 2.46. Ist $i : A \hookrightarrow X$ die Inklusion, so ist in der Notation von Definition 2.45 der Raum $X \cup_f Y$ das Pushout von $X \xleftarrow{i} A \xrightarrow{f} Y$.

Beispiel 2.47. (1) Die Einpunktvereinigung zweier topologischer Räume X und Y bezüglich $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ ist gegeben durch $X \vee Y = X \cup_f Y$, wobei $f : \{x_0\} \rightarrow Y$, $f(x_0) = y_0$.

(2) Sei wieder $D^n \subset \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene Einheitskugel, wobei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f : S^{n-1} \rightarrow D^n$ die Inklusion des Randes. Dann ist $D^n \cup_f D^n \approx S^n$. Es gilt nämlich:

Betrachten wir $D^n \sqcup D^n = D^n \times \{0, 1\}$ und die Abbildung

$$g : D^n \sqcup D^n \rightarrow S^n, \quad g((x_1, \dots, x_n), j) = \left(x_1, \dots, x_n, (-1)^j \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right),$$

Man sieht leicht, dass g surjektiv und stetig ist. Weiter rechnet man nach, dass g abgeschlossen ist, also ist g nach Satz 2.30 eine Identifizierung.

Ist nun $p : D^n \sqcup D^n \rightarrow D^n \cup_f D^n$ die kanonische Projektion, gilt für alle $x, y \in D^n$ und $i, j \in \{0, 1\}$, dass

$$g(x, i) = g(y, j) \iff (x, i) = (y, j) \vee x = y \in S^{n-1} \iff p(x) = p(y).$$

Also folgt die Behauptung aus Satz 2.31.

(Übung: Erstelle eine Skizze dieser Verklebung für $n = 2$.)

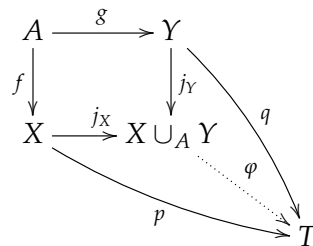
(3) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$, $f(x) = \mathbb{R}x$. Dann ist

$$\mathbb{R}P^{n-1} \cup_f D^n \approx \mathbb{R}P^n.$$

Dies ist Aufgabe 4 von Übungsblatt 3.

Schließlich wollen wir zeigen, dass sich das Pushout zweier Abbildungen eine universelle Eigenschaft besitzt, welche in vielen Situationen benutzt werden kann ohne die konkrete Konstruktion zu betrachten.

Satz 2.48 (Universelle Eigenschaft des Pushouts). *Seien A , X und Y topologische Räume, $f : A \rightarrow X$ und $g : A \rightarrow Y$ stetige Abbildungen und sei $X \cup_A Y$ das Pushout von $X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} Y$. Seien $j_X : X \rightarrow X \cup_A Y$ und $j_Y : Y \rightarrow X \cup_A Y$ die Verknüpfungen der Inklusionen $i_X : X \rightarrow X \sqcup Y$ und $i_Y : Y \rightarrow X \sqcup Y$ mit der kanonischen Projektion des Pushouts. Dann gilt: Ist T ein topologischer Raum und sind $p : X \rightarrow T$ und $q : Y \rightarrow T$ stetige Abbildungen mit $p \circ f = q \circ g$, so gibt es eine eindeutige stetige Abbildung $\varphi : X \cup_A Y \rightarrow T$, so dass $p = \varphi \circ j_X$ und $q = \varphi \circ j_Y$.*



Beweis. Die Abbildungen p und q induzieren eine Abbildung $r : X \sqcup Y \rightarrow T$, die eindeutig definiert ist durch $r \circ i_X = p$ und $r \circ i_Y = q$. Nach der universellen Eigenschaft der Summentopologie ist r stetig, da p und q stetig sind.

Da $p \circ f = q \circ g$, ist klar, dass $r(i_X(f(a))) = r(i_Y(g(a)))$, also ist $r(x) = r(y)$, wenn $f(a) = x$ und $g(a) = y$ für ein $a \in A$ erfüllt ist. Nach Konstruktion des Pushouts als Quotientenraum gibt es daher nach Korollar 2.29 eine eindeutige stetige Abbildung $\varphi : X \cup_A Y \rightarrow T$ mit $\varphi \circ \pi = r$, wobei $\pi : X \sqcup Y \rightarrow X \cup_A Y$ die kanonische Projektion bezeichne.

Man überprüft nun ohne Probleme, dass das Diagramm mit dieser Wahl von φ kommutiert. $\square$

Für den Fall der Verklebung von Räumen sieht diese Eigenschaft etwas übersichtlicher aus, daher wollen wir diese Bedingung noch explizit formulieren. Wir überlassen es der Leserin oder dem Leser, zu überprüfen, dass dies wirklich ein Spezialfall des letzten Satzes ist.

Korollar 2.49 (Universelle Eigenschaft der Verklebung). *Seien X und Y topologische Räume, sei $A \subset X$, sei $f : A \rightarrow Y$ stetig und sei $\pi : X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ die kanonische Projektion. Dann gilt:*

Ist T ein beliebiger topologischer Raum und sind $p : X \rightarrow T$ und $q : Y \rightarrow T$ stetige Abbildungen, so dass $p(x) = q(f(x))$ für jedes $x \in A$ gilt, so gibt es eine eindeutige stetige Abbildung

$$\varphi : X \cup_f Y \rightarrow T,$$

für die gilt, dass $\varphi(\pi(x)) = p(x)$ für alle $x \in X$ und $\varphi(\pi(y)) = q(y)$ für alle $y \in Y$.

Es gibt auch zum Pushout eine duale Konstruktion, das sogenannte Pullback zweier Abbildungen. Die explizite Konstruktion dieses Pullbacks ist sogar deutlich einfacher als beim Pushout. Pullbacks werden in dieser Vorlesung gar nicht mehr oder erst ganz am Ende der Vorlesung wieder auftauchen, der Rest dieses Abschnitts kann also ohne Nachteile übersprungen werden.

Definition 2.50. Seien X, Y und B topologische Räume und seien $f : X \rightarrow B$ und $g : Y \rightarrow B$ stetige Abbildungen. Die Menge

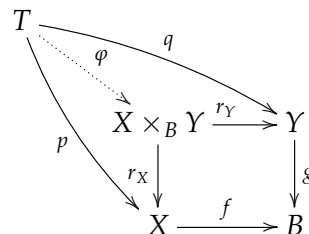
$$X \times_B Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\} \subset X \times Y$$

versehen mit der Unterraumtopologie bezüglich der Produkttopologie auf $X \times Y$ heißt *Pullback* oder *Faserprodukt* von $f : X \rightarrow B$ und $g : Y \rightarrow B$. (Kurzschreibweise: Pullback/Faserprodukt von $X \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} Y$.)

Der Nutzen dieser Räume wird vor allem beim Studium von Faserbündeln bewusst, wie wir vielleicht gegen Ende des Semesters noch sehen werden. Wir beschließen das Kapitel mit der universellen Eigenschaft des Pullbacks. Man beachte, dass Umdrehen aller Pfeile im kommutativen Diagramm im folgenden Satz das entsprechende Diagramm aus der universellen Eigenschaft des Pushouts liefert.

Satz 2.51. Seien X, Y und B topologische Räume, $f : X \rightarrow B$ und $g : Y \rightarrow B$ stetige Abbildungen und sei $X \times_B Y$ das Pullback von $X \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} Y$. Seien $r_X : X \times_B Y \rightarrow X$ und $r_Y : X \times_B Y \rightarrow Y$ die Einschränkungen der Projektionen $\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X$ und $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$. Dann gilt:

Ist T ein topologischer Raum und sind $p : T \rightarrow X$ und $q : T \rightarrow Y$ stetige Abbildungen mit $f \circ p = g \circ q$, so gibt es eine eindeutige stetige Abbildung $\varphi : T \rightarrow X \times_B Y$, so dass $p = r_X \circ \varphi$ und $q = r_Y \circ \varphi$.



Beweis. Die Abbildung $r : T \rightarrow X \times Y$, $r(t) = (p(t), q(t))$, ist offensichtlich die eindeutige Abbildung mit $\text{pr}_X \circ r = p$ und $\text{pr}_Y \circ r = q$ ist. Da p und q stetig sind, ist r nach der universellen Eigenschaft der Produkttopologie stetig. Da $f \circ p = g \circ q$, gilt nach Definition von r , dass $r(T) \subset X \times_B Y$. Es gibt also eine eindeutige Abbildung $\varphi : T \rightarrow X \times_B Y$, so dass $i \circ \varphi = r$, wobei $i : X \times_B Y \hookrightarrow X \times Y$ sei. Nach der universellen Eigenschaft der Unterraumtopologie ist φ wieder stetig. Man rechnet nun ohne Probleme nach, dass obige Diagramm mit dieser Wahl von φ kommutiert. $\square$

Kapitel 3

Eigenschaften topologischer Räume

In diesem Kapitel bündeln wir Resultate über wichtige grundlegende Eigenschaften topologischer Räume. Zunächst werden wir Zusammenhang und Wegzusammenhang topologischer Räume betrachten und die beiden Begriffe miteinander vergleichen.

Anschließend geht es um Trennungseigenschaften, womit gemeint ist, dass wir untersuchen wollen, wie man in topologischen Räumen Punkte oder abgeschlossene Mengen durch offene Umgebungen voneinander „isolieren“ kann. Der wichtigste Begriff dabei, der uns für den Rest des Semesters begleiten wird, ist dabei der des Hausdorff-Raums.

Im Anschluss werden wir uns Existenzsätze für stetige Funktionen anschauen, wobei direkt die Trennungseigenschaften zur Anwendung kommen. Die Hauptresultate sind das Lemma von Urysohn und der Erweiterungssatz von Tietze, die wir beide in diesem Abschnitt sehen und beweisen werden.

Schließlich schauen wir uns metrische Räume noch einmal genauer an und betrachten dabei den Begriff der Vollständigkeit. Wir betrachten Vervollständigungen von metrischen Räumen und stetige Fortsetzungen auf diese, bevor wir uns dem Satz von Baire für vollständige metrische Räume zuwenden und auch eine Anwendung dafür sehen werden.

Ein fundamentaler Begriff der Topologie taucht in diesem Kapitel noch nicht auf: Kompaktheit. Diese Eigenschaft ist so wichtig und facettenreich, dass wir ihr das ganze vierte Kapitel widmen werden.

3.1 Zusammenhang

Im letzten Kapitel haben wir unter anderem die topologische Summe kennengelernt, in welcher anschaulich gesprochen topologische Räume nebeneinander gelegt werden. Die einzelnen Räume in dieser Summe sind topologisch nicht miteinander verbunden, die Topologien werden „komponentenweise“ betrachtet.

In diesem und dem nächsten Abschnitt wollen wir zwei Gegenbegriffe entwickeln, wir wollen nämlich topologische Räume studieren, die *zusammenhängen*. Für diese Vorstel-

lung gibt es zwei unterschiedliche Abstraktionen, die des Zusammenhangs und die des Wegzusammenhangs. Beide Vorstellungen stimmen etwa auf normierten Vektorräumen wie dem $\mathbb{R}^n$ überein. Wir werden die beiden Begriffe nacheinander definieren und ausarbeiten und schließlich ein allgemeineres Kriterium dafür ausarbeiten, wann sie übereinstimmen.

Definition 3.1. Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es keine zwei offenen nichtleeren Teilmengen $U, V \subset X$ gibt, so dass

$$U \cup V = X \quad \text{und} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *zusammenhängend*, wenn sie zusammenhängend bezüglich der Unterraumtopologie ist.

Beispiel 3.2. (1) $\mathbb{R}^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ zusammenhängend. Dies zeigen wir später.

(2) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend: ist $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so ist $\mathbb{Q} \subset (-\infty, r) \cup (r, +\infty)$.

(3) Sei $\mathbb{R}^{n \times n}$ die Menge der reellen $(n \times n)$ -Matrizen, betrachtet als topologischer Raum mit der Topologie, die von einem Isomorphismus $\mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ und der euklidischen Topologie induziert wird. Sei

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Dann ist $GL_n(\mathbb{R})$ nicht zusammenhängend: die Determinante ist als Polynom stetig, also ist

$$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}((-\infty, 0)) \cup \det^{-1}((0, +\infty))$$

eine Zerlegung von $GL_n(\mathbb{R})$ in nichtleere disjunkte offene Teilmengen.

Der Zusammenhang eines Raumes lässt sich alternativ durch zusammenhängende Teilmengen beschreiben.

Satz 3.3. Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn es für je zwei $x, y \in X$ ein zusammenhängendes $A \subset X$ gibt mit $x, y \in A$.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Klar.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, es gebe $U, V \subset X$ offen und nichtleer mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$. Wähle $x \in U$ und $y \in V$ und sei $A \subset X$ zusammenhängend mit $x, y \in A$. Dann wäre jedoch $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ mit $A \cap U \neq \emptyset$ und $A \cap V \neq \emptyset$, also wäre A als Unterraum nicht zusammenhängend. Dies ist ein Widerspruch, also ist X zusammenhängend. $\square$

Der folgende Satz liefert zwei alternative Charakterisierungen zusammenhängender Mengen.

Satz 3.4. Sei X ein topologischer Raum. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) X ist zusammenhängend.

(ii) $\emptyset$ und X sind die einzigen Teilmengen von X , die offen und abgeschlossen sind.

(iii) Jede stetige Abbildung von X in einen Raum mit diskreter Topologie ist konstant.

Beweis. Wir werden einen Ringschluss herstellen.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen, es gebe $U \subset X$ mit $\emptyset \neq U \neq X$, so dass U offen und abgeschlossen ist. Dann ist $V := X \setminus U$ nichtleer und offen in X und es gilt $U \cap V = \emptyset$. Da dann $X = U \cup V$, würde folgen, dass X nicht zusammenhängend wäre, was im Widerspruch zur Annahme stünde. Also kann es kein solches U geben.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei Y mit der diskreten Topologie versehen und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Da für jedes $y \in Y$ die Menge $\{y\}$ offen und abgeschlossen in Y ist, ist $f^{-1}(\{y\})$ offen und abgeschlossen in X für jedes $y \in Y$. Nach Annahme ist also $f^{-1}(\{y\}) \in \{\emptyset, X\}$ für alle $y \in Y$, was nur dann erfüllt sein kann, wenn f konstant ist.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie versehen. Ist X nicht zusammenhängend und sind $U, V \subset X$ offen, nichtleer und disjunkt mit $U \cup V = X$, so ist die Abbildung

$$f : X \rightarrow \{0, 1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in U, \\ 1 & \text{falls } x \in V, \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig. Im Umkehrschluss folgt die Behauptung. $\square$

Satz 3.5. Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.

Beweis. Sei $A \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann gibt es $x, y \in A$, so dass $[x, y] \not\subset A$. Sei also $z \in (x, y) \setminus A$. Dann ist $A = (A \cap (-\infty, z)) \cup (A \cap (z, +\infty))$, so dass A nicht zusammenhängend ist. Jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist also ein Intervall.

Sei I ein Intervall und nehme an, dass I nicht zusammenhängend sei. Seien $U, V \subset I$ offen, nichtleer und disjunkt mit $I = U \cup V$ und seien $s \in U$ und $t \in V$. Nehme o.B.d.A. an, dass $s < t$ und setze $m := \inf\{x \in V \mid x > s\}$. Dann ist $m \in \bar{V}$. Da jedoch $V = I \setminus U$ und U offen ist, ist V abgeschlossen in I , so dass $\bar{V} = V$ nach Satz 1.24.e). Also ist $m \in V$. Da V offen in I ist, gäbe es dann ein $\varepsilon > 0$ mit $(m - \varepsilon, m + \varepsilon) \subset V$. Da jedoch $s < m - \varepsilon$, steht dies im Widerspruch zur Definition von m . Also ist I zusammenhängend. $\square$

Der folgende Satz ist eine zentrale Aussage über zusammenhängende Mengen und verallgemeinert, wie wir sehen werden, einen wichtigen Satz aus der Analysis I von den reellen Zahlen auf beliebige topologische Räume.

Satz 3.6. Seien X und Y topologische Räume. Ist X zusammenhängend und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis. Sei Z ein diskreter Raum und sei $g : f(X) \rightarrow Z$ stetig. Dann ist auch $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig und damit nach Satz 3.4 konstant. Da f die Menge X surjektiv auf $f(X)$ abbildet, folgt daraus, dass g konstant ist. Also ist Z nach Satz 3.4 zusammenhängend. $\square$

Korollar 3.7. a) Seien X und Y topologische Räume. Ist X zusammenhängend und Y homöomorph zu X , so ist Y zusammenhängend.

b) Quotientenräume zusammenhängender Räume sind zusammenhängend.

Zusammenhängend zu sein ist also insbesondere eine topologische Eigenschaft im Sinne von Abschnitt 2.1.

Korollar 3.8 (Zwischenwertsatz). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$. Dann gibt es für jedes $c \in (f(a), f(b))$ ein $t \in (a, b)$ mit $f(t) = c$.

Beweis. Nach Satz 3.5 ist $[a, b]$ zusammenhängend, also ist $f([a, b])$ nach Satz 3.6 zusammenhängend und damit wieder nach Satz 3.5 wieder ein Intervall. Insbesondere gilt also $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Satz 3.9. Sei X ein topologischer Raum. Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von X . Falls $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ und falls $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ für alle $i, j \in I$, so ist X zusammenhängend.

Beweis. Seien $U, V \subset X$ offen und disjunkt mit $U \cup V = X$. Wähle $i \in I$ beliebig. Da A_i zusammenhängend ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $A_i \subset U$. Da $A_j \cap A_i \neq \emptyset$, folgt $A_j \cap U \neq \emptyset$ für alle $j \in I$. Da aber jedes der A_j zusammenhängend ist, muss $A_j \subset U$ für alle $j \in I$ gelten, also folgt $X = \bigcup_{j \in I} A_j \subset U$ und damit $X = U$. Also ist X zusammenhängend. $\square$

Satz 3.10. Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subset X$ zusammenhängend. Ist $B \subset X$ mit $A \subset B \subset \bar{A}$, so ist B zusammenhängend.

Beweis. Angenommen, es gebe $U, V \subset X$ offen, so dass $B \cap U \neq \emptyset, B \cap V \neq \emptyset, U \cap V \cap B = \emptyset$ und $B \subset U \cup V$. Man folgert dann aus $A \subset B \subset \bar{A}$, dass auch $U \cap A \neq \emptyset$ und $V \cap A \neq \emptyset$, woraus folgen würde, dass A nicht zusammenhängend wäre. Also kann es solche U und V nicht geben, so dass B zusammenhängend ist. $\square$

Mit der folgenden Konstruktion wollen wir die Struktur von Räumen besser verstehen, die nicht zusammenhängend sind.

Satz/Definition 3.11. Sei X ein topologischer Raum. Definiere eine Relation $\sim_c$ auf X durch

$$x \sim_c y : \Leftrightarrow \exists A \subset X \text{ zusammenhängend mit } x, y \in A.$$

$\sim_c$ ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen von $\sim_c$ heißen Zusammenhangskomponenten von X oder einfach Komponenten von X . Bezeichne die Menge der Zusammenhangskomponenten von X mit $C(X)$.

Beweis. Wir müssen nachrechnen, dass $\sim_c$ eine Äquivalenzrelation ist. $\sim_c$ ist reflexiv, da für jedes $x \in A$ die Menge $\{x\}$ zusammenhängend ist. Die Symmetrie von $\sim_c$ ist klar.

Um die Transitivität von $\sim_c$ zu sehen, wähle $x, y, z \in X$ mit $x \sim_c y$ und $y \sim_c z$ und $A, B \subset X$ zusammenhängend mit $x, y \in A$ und $y, z \in B$. Da $y \in A \cap B$, ist $A \cap B \neq \emptyset$, also ist $A \cup B$ nach Satz 3.9 zusammenhängend. Da $x, z \in A \cup B$, folgt $x \sim_c z$, also ist $\sim_c$ transitiv. $\square$

Beispiel 3.12. (1) Nach Satz 3.3 ist X genau dann zusammenhängend, wenn $\mathcal{C}(X) = \{X\}$.

(2) Jede Komponente von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ besteht aus nur einem Punkt. Räume mit dieser Eigenschaft heißen *total unzusammenhängend*.

Satz 3.13. Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt:

- a) $X = \bigcup_{Z \in \mathcal{C}(X)} Z$ und die Komponenten sind paarweise disjunkt.
- b) Jede Komponente von X ist zusammenhängend.
- c) Jede zusammenhängende Teilmenge von X ist in einer Komponente von X enthalten.
- d) Jede Komponente von X ist abgeschlossen in X .

Beweis. a) Klar.

b) Dies folgt direkt aus Satz 3.3.

c) Ist $A \subset X$ zusammenhängend, so gilt für alle $x, y \in A$, dass $x \sim_c y$.

d) Nach b) und Satz 3.10 gilt für jedes $Z \in \mathcal{C}(X)$, dass $\bar{Z}$ zusammenhängend ist. Also muss $\bar{Z}$ nach c) in einer Komponente enthalten sein. Also folgt $\bar{Z} \subset Z$ und damit nach Satz 1.24.e), dass Z abgeschlossen ist.

□

Bemerkung 3.14. Die Komponenten eines topologischen Raumes müssen nicht offen sein. Ein Gegenbeispiel dafür ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mit der Unterraumtopologie. Für jedes offene $U \subset \mathbb{Q}$ gibt es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $U = \mathbb{Q} \cap I$, welches jedoch stets mehr als ein Element enthält.

3.2 Wegzusammenhang

Definition 3.15. Sei X ein topologischer Raum und seien $x, y \in X$. Ein *Weg in X von x nach y* ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei $x, y \in X$ stets einen Weg in X von x nach y gibt. $A \subset X$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn A bezüglich der Unterraumtopologie wegzusammenhängend ist.

Satz 3.16. Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend.

Beweis. Sei X wegzusammenhängend, seien $x, y \in X$ beliebig und sei γ ein Weg in X von x nach y . Nach Satz 3.6 ist $A := \gamma([0, 1])$ dann eine zusammenhängende Menge mit $x, y \in A$. Also ist X nach Satz 3.3 zusammenhängend. □

Beispiel 3.17. (1) Jede konvexe Teilmenge K eines normierten Vektorraums V ist wegzusammenhängend. Für alle $x, y \in K$ ist nämlich dann $\gamma : [0, 1] \rightarrow K$, $\gamma(t) = (1-t)x + ty$, ein Weg in K von x nach y . Insbesondere ist V selbst zusammenhängend.

(2) Nicht jede zusammenhängende Menge ist wegzusammenhängend. Betrachte etwa den „topologischen Sinus“, der Unterraum

$$S := \{(0, 0)\} \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1] \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

S ist nicht wegzusammenhängend, da $(0, 0)$ mit keinem Punkt der Form $(x, \sin(1/x))$ in S durch einen Weg verbunden werden kann (Übung). Angenommen, es gäbe $U, V \subset S$ offen und nichtleer mit $U \cup V = S$ und $U \cap V = \emptyset$. Da die Menge $\{(x, \sin(\frac{1}{x})); x \in (0, 1]\}$ als stetiges Bild von $(0, 1]$ zusammenhängend ist, müsste sie vollständig in einer der beiden Mengen liegen, nehme an, dass $\{(x, \sin(\frac{1}{x})); x \in (0, 1]\} \subset V$. Dann müsste nicht nur gelten, dass $(0, 0) \in U$, sondern auch $S \cap U = \{(0, 0)\}$. Dies ist jedoch nicht möglich: Nach Definition der Unterraumtopologie gibt es ein offenes $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ mit $U = \tilde{U} \cap S$. Da jedoch $\{(x, \sin(\frac{1}{x})); x \in (0, 1]\}$ auch die Folge $(\frac{1}{n\pi}, \sin(n\pi))_n = (\frac{1}{n\pi}, 0)_n$ enthält, die in $\mathbb{R}^2$ gegen $(0, 0)$ konvergiert, kann es kein solches $\tilde{U}$ geben. Also ist S zusammenhängend.

Satz 3.18. Seien X und Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Ist X wegzusammenhängend, so ist $f(X)$ wegzusammenhängend.

Beweis. Dies ist klar: Ist γ ein Weg in X von x nach y , so ist $f \circ \gamma$ ein Weg in $f(X)$ von $f(x)$ nach $f(y)$. $\square$

Satz/Definition 3.19. Sei X ein topologischer Raum. Definiere eine Relation $\sim_w$ auf X durch

$$x \sim_w y : \Leftrightarrow \text{Es gibt einen Weg in } X \text{ von } x \text{ nach } y.$$

$\sim_w$ ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen von $\sim_w$ heißen Wegzusammenhangskomponenten von X oder einfach Wegkomponenten von X . Bezeichne die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X mit $\mathcal{W}(X)$.

Beweis. Wir müssen nachrechnen, dass $\sim_w$ eine Äquivalenzrelation ist. Der konstante Weg $[0, 1] \rightarrow X$, $t \mapsto x$ ist für jedes x ein Weg in X von x zu sich selbst, also ist $\sim_w$ reflexiv.

Nun zur Symmetrie. Seien $x, y \in X$ mit $x \sim_w y$ und sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg in X von x nach y . Dann ist die Abbildung

$$\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X, \quad \bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t),$$

ein Weg in X von y nach x („durchlaufe γ rückwärts“). Also folgt $y \sim_w x$ und damit die Symmetrie von $\sim_w$.

Für die Transitivität seien $x, y, z \in X$ mit $x \sim_w y$ und $y \sim_w z$. Sei γ_1 ein Weg in X von x nach y und γ_2 ein Weg in X von y nach z . Wir wollen die beiden Wege „hintereinander hängen“. Sei nämlich

$$\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow X, \quad \gamma_0(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{falls } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Man rechnet leicht nach, dass γ_0 ein Weg in X von x nach z ist, also folgt $x \sim_w z$ und damit die Transitivität von $\sim_w$. $\square$

Satz 3.20. Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt:

- a) $X = \bigcup_{W \in \mathcal{W}(X)} W$ und die Wegkomponenten sind paarweise disjunkt.
- b) Jede Wegkomponente von X ist wegzusammenhängend.
- c) Jede Wegkomponente von X ist in einer Komponente enthalten.

Beweis. a) und b) sind klar. Da W wegzusammenhängend ist, ist W nach Satz 3.16 zusammenhängend. Also folgt c) aus Satz 3.13.c). $\square$

Bemerkung 3.21. Eine Wegkomponente eines topologischen Raumes ist im Allgemeinen weder abgeschlossen noch offen. In Beispiel 3.17 sind etwa die beiden Wegkomponenten nicht abgeschlossen.

Aus der Analysis II wissen wir, dass ein metrischer Raum genau dann zusammenhängend ist, wenn er wegzusammenhängend ist. In Beispiel 3.17 haben wir jedoch gesehen, dass dies für allgemeine topologische Räume nicht gilt. Wir wollen nun ein Kriterium dafür finden, das die Gleichheit von Wegzusammenhang und Zusammenhang liefert.

Definition 3.22. Ein topologischer Raum X heißt *lokal (weg)zusammenhängend*, wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine (weg)zusammenhängende Umgebung V von x mit $V \subset U$ gibt.

Beispiel 3.23. (1) Jeder normierte Vektorraum ist lokal wegzusammenhängend, da in normierten Räumen alle offenen Kugeln konvex sind.

(2) Der „konvergente Besen“ ist nicht lokal zusammenhängend:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei A_n das Geradenstück in $\mathbb{R}^2$, das den Punkt $(1, 0)$ mit $(0, \frac{1}{n})$ verbindet, explizit ist $A_n = \{(t, 1 - nt) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, \frac{1}{n}]\}$. Sei dann

$$T := (\{0\} \times [0, 1]) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

mit der Unterraumtopologie. Betrachte den Punkt $(0, \frac{1}{2}) \in T$. Für jedes $\frac{1}{2} \geq \varepsilon > 0$ ist dann $B_\varepsilon(0, \frac{1}{2}) \cap T$ nicht zusammenhängend, da es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $A_n \cap B_\varepsilon(0, \frac{1}{2}) \neq \emptyset$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt mit der Definition der Unterraumtopologie, dass eine hinreichend kleine offene Umgebung von $(0, \frac{1}{2})$ in T keine zusammenhängende Umgebung enthalten kann.

- (3) Gleichfalls ist der „topologische Sinus“ aus Beispiel 3.17 nicht lokal zusammenhängend.

Bemerkung 3.24. (1) Ein lokal (weg)zusammenhängender Raum ist im Allgemeinen nicht (weg)zusammenhängend. Sind X und Y beliebige lokal (weg)zusammenhängende Räume, so ist ihre topologische Summe $X \sqcup Y$ lokal (weg)zusammenhängend, aber nicht (weg)zusammenhängend. (Beispiel: $X = (-\infty, 0)$, $Y = (0, +\infty)$.)

- (2) Ein zusammenhängender Raum ist im Allgemeinen nicht lokal zusammenhängend. Ein Gegenbeispiel dafür ist der „konvergente Besen“ aus dem letzten Beispiel, von welchem man leicht zeigt, dass er wegzusammenhängend ist.

Satz 3.25. Sei X ein lokal zusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt:

- a) Jedes Komponente von X ist offen in X .
 b) X ist homöomorph zur topologischen Summe $\bigsqcup_{Z \in \mathcal{C}(X)} Z$.

Beweis. a) Sei $Z \in \mathcal{C}(X)$ und sei $x \in Z$. Da X lokal zusammenhängend ist, gibt es eine zusammenhängende Umgebung U von x in X . Da $U \cap Z \neq \emptyset$, folgt aus Satz 3.13.c), dass $U \subset Z$. Also ist Z eine Umgebung von x und da x beliebig gewählt war, folgt die Offenheit von Z .

- b) Betrachte die Abbildung $\Phi : X \rightarrow \bigsqcup_{Z \in \mathcal{C}(X)} Z$, die jeden Punkt in die zugehörige Komponente abbildet. Man rechnet leicht nach, dass Φ stetig und bijektiv ist. Aus a) lässt sich folgern, dass Φ eine offene Abbildung ist, also ist Φ ein Homöomorphismus nach Satz 2.5.

□

Satz 3.26. Sei X ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt:

- a) Jede Wegkomponente von X ist offen in X .
 b) $\mathcal{C}(X) = \mathcal{W}(X)$.
 c) X ist genau dann zusammenhängend, wenn X wegzusammenhängend ist.

Beweis. a) Dies folgt völlig analog zu Satz 3.25.a)

- b) Sei $x \in X$ und seien $Z \in \mathcal{C}(X)$ und $W \in \mathcal{W}(X)$ mit $x \in Z$ und $x \in W$. Nach Satz 3.20.c) ist $W \subset Z$. Falls $W \neq Z$ gelten würde, so wäre nach Satz 3.20.a):

$$Z \setminus W = \bigcup_{W' \in \mathcal{W}(X) \setminus \{W\}} (Z \cap W').$$

Da Z nach Satz 3.25.a) offen ist und jedes $W' \in \mathcal{W}(X)$ nach a) offen ist, folgt dann, dass $Z \setminus W$ offen wäre. Also wäre $Z = W \cup (Z \setminus W)$ eine Zerlegung in zwei disjunkte offene nichtleere Teilmengen. Dies kann jedoch nicht sein, da Z nach Satz 3.13 zusammenhängend ist. Also gilt $Z = W$.

- c) Dies folgt direkt aus b), da ein Raum (weg)zusammenhängend ist, wenn es genau eine (Weg)zusammenhangskomponente gibt. □

Wir beenden den Abschnitt mit dem folgenden Satz über (Weg)zusammenhang und Produkttopologie.

Satz 3.27. *Seien X und Y topologische Räume. $X \times Y$ ist genau dann (weg)zusammenhängend, wenn X und Y (weg)zusammenhängend sind.*

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Dies folgt aus der Stetigkeit der Projektionen $\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X$ und $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$ zusammen mit Satz 3.6 bzw. Satz 3.18.

„ $\Leftarrow$ “: Nehme an, dass X und Y zusammenhängend seien. Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ und betrachte die Menge

$$Z := X \times \{y_2\} \cup \{x_1\} \times Y \subset X \times Y.$$

Dann sind $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Z$. Da $X \times \{y_2\}$ homöomorph zu X und $\{x_1\} \times Y$ homöomorph zu Y ist, sind beide Mengen zusammenhängend. Außerdem ist

$$(X \times \{y_2\}) \cap (\{x_1\} \times Y) = \{(x_1, y_2)\} \neq \emptyset,$$

so dass Z nach Satz 3.9 wieder zusammenhängend ist. Also folgt aus Satz 3.3, dass $X \times Y$ zusammenhängend ist.

Nehme nun an, dass X und Y wegzusammenhängend seien und wähle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ beliebig. Sei $\alpha : [0, 1] \rightarrow Y$ ein Weg in Y von y_1 nach y_2 und $\beta : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg in X von x_1 nach x_2 und betrachte die Abbildungen

$$\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X \times Y, \quad \gamma_1(t) = (x_1, \alpha(t)), \quad \gamma_2(t) = (\beta(t), y_2).$$

Dann ist γ_1 ein Weg in $X \times Y$ von (x_1, y_1) nach (x_1, y_2) , γ_2 ein Weg in $X \times Y$ von (x_1, y_2) nach (x_2, y_2) und definieren wir einen Weg analog zu (3.1), so erhalten wir einen Weg in $X \times Y$ von (x_1, y_1) nach (x_2, y_2) . □

3.3 Trennungseigenschaften

Wir wollen in diesem Abschnitt die wichtigsten Trennungseigenschaften topologischer Räume betrachten, die für „schöne“ topologische Räume meistens erfüllt sind und deren Annahme einige sehr hilfreiche Konsequenzen hat. Insbesondere führen wir den Begriff des *Hausdorff-Raums* ein, der in vielen der folgenden Kapiteln fundamental sein wird.

Definition 3.28 (Trennungsaxiome). Sei X ein topologischer Raum.

- (1) X heißt T_1 -Raum, wenn es zu je zwei $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Umgebungen U von x und V von y gibt, so dass $x \notin V$ und $y \notin U$.

- (2) X heißt T_2 -Raum oder *Hausdorff-Raum*, wenn es zu je zwei $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Umgebungen U von x und V von y gibt, so dass $U \cap V = \emptyset$.
- (3) X heißt T_3 -Raum oder *regulär*, wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ mit $x \notin A$ eine offene Umgebung U von x und eine offene Menge V mit $A \subset V$ gibt, so dass $U \cap V = \emptyset$.
- (4) X heißt T_4 -Raum oder *normal*, wenn es zu je zwei abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ offene Mengen $U, V \subset X$ gibt mit $A \subset U, B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Man beachte hierzu im Buch von Laures/Szymik Abbildung 3.4 auf Seite 47.

Bemerkung 3.29. (1) Außerhalb dieses Abschnitts werden wir in dieser Vorlesung nur Hausdorff-Räume und normale Räume betrachten, es wird also nirgendwo sonst explizit um T_1 -Räume oder reguläre Räume gehen.

- (2) Es gibt weitere Trennungseigenschaften, wie $T_0, T_{2\frac{1}{2}}, T_{3\frac{1}{2}}, \dots$, die jedoch im topologischen Alltag kaum eine Rolle spielen und deshalb in dieser Vorlesung nicht vorkommen werden.
- (3) **Achtung!** Bei der Definition eines *normalen* Raums gibt es zwei unterschiedliche Konventionen, die von Buch zu Buch unterschiedlich sind. In der zweiten Konvention ist ein normaler Raum ein Hausdorff-Raum, der auch T_4 -Raum ist. In unserer Konvention würden wir dies als *normalen Hausdorff-Raum* bezeichnen.

Beispiel 3.30. (1) Die diskrete Topologie auf einer beliebigen Menge erfüllt jedes der obigen Trennungsaxiome.

- (2) Sei X eine Menge mit mindestens zwei Elementen mit der indiskreten Topologie versehen. Dann ist X regulär und normal (die Bedingung ist leer), jedoch weder T_1 -Raum noch Hausdorff-Raum.
- (3) Jeder Hausdorff-Raum ist ein T_1 -Raum.
- (4) Jeder metrische Raum ist ein Hausdorff-Raum: ist (X, d) metrisch, $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $r := d(x, y)$, so haben $U := B_{\frac{r}{2}}(x)$ und $V := B_{\frac{r}{2}}(y)$ die gewünschte Eigenschaft.
- (5) Mit etwas mehr Aufwand zeigt man, dass jeder metrische Raum normal ist.
- (6) Betrachte $\mathbb{N}$ mit der kofiniten Topologie $\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus U \text{ ist endlich}\}$. Dann ist $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ ein T_1 -Raum, erfüllt aber keine der anderen Trennungseigenschaften.
- (7) Die Gerade mit zwei Ursprüngen aus Beispiel 2.43.(2) ist kein Hausdorff-Raum. Bezeichnen wir die beiden Ursprünge mit 0 und $0'$, so überlegt man sich, dass sich je zwei offene Umgebungen von 0 und $0'$ stets nichtleer schneiden.

Satz 3.31. Ein topologischer Raum ist genau dann ein T_1 -Raum, wenn jede einelementige Teilmenge abgeschlossen ist.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Sei X ein T_1 -Raum und $x \in X$. Dann gibt es für jedes $y \in X \setminus \{x\}$ mit ein $U \subset X$ offen mit $y \in U$ und $x \notin U$, also $U \subset X \setminus \{x\}$. Damit ist $X \setminus \{x\}$ offen.

„ $\Leftarrow$ “: Sei X ein topologischer Raum, in dem $\{x\}$ für jedes $x \in X$ abgeschlossen ist. Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Da $X \setminus \{x\}$ und $X \setminus \{y\}$ offen sind, gibt es $U, V \subset X$ offen mit $x \in U$, $U \subset X \setminus \{y\}$, $y \in V$ und $V \subset X \setminus \{x\}$. Also ist $y \notin U$ und $x \notin V$ und es folgt, dass X ein T_1 -Raum ist. $\square$

Mit diesem Kriterium können wir neue Verbindungen zwischen den Trennungseigenschaften herstellen.

Korollar 3.32. a) Jeder reguläre T_1 -Raum ist ein Hausdorff-Raum.

b) Jeder normale T_1 -Raum ist regulär.

Kurzgefasst könnte man das letzte Korollar formulieren als: „Für jeden T_1 -Raum gilt: $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$.“

Satz 3.33. Ein topologischer Raum X ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn die Diagonale

$$\Delta_X := \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$$

abgeschlossen in $X \times X$ ist.

Beweis. Übungsblatt 4, Aufgabe 3. $\square$

Satz 3.34. Sei X ein topologischer Raum.

a) X ist genau dann regulär, wenn es für jedes $x \in X$ und jede Umgebung U von x eine abgeschlossene Umgebung A von x gibt mit $A \subset U$.

b) X ist genau dann normal, wenn es für jedes abgeschlossene $A \subset X$ und jedes offene $U \subset X$ mit $A \subset U$ eine offene Menge $V \subset X$ gibt mit $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$.

Beweis. Wir zeigen nur Teil b), da sich Teil a) völlig analog dazu beweisen lässt.

„ $\Rightarrow$ “: Seien A abgeschlossen und U offen mit $A \subset U$. Dann ist $X \setminus U$ abgeschlossen mit $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Da $X \setminus U$ abgeschlossen und X normal ist, gibt es insbesondere ein offenes $U_0 \subset X$ mit $U_0 \cap A = \emptyset$ und $X \setminus U \subset U_0$. Die Behauptung folgt dann mit $V := \text{int}(X \setminus U_0)$.

„ $\Leftarrow$ “: Seien $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $X \setminus B$ offen mit $A \subset X \setminus B$, also gibt es nach Annahme ein offenes $U \subset X$ mit $A \subset U \subset \bar{U} \subset X \setminus B$. Setzen wir $V := X \setminus \bar{U}$, so ist V offen mit $B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$. Also ist X normal. $\square$

In Abschnitt 1.4 und Beispiel 2.43.(2) haben wir gesehen, dass in allgemeinen topologischen Räumen der Grenzwert einer Folge nicht eindeutig ist. In Hausdorff-Räumen ist dies jedoch stets der Fall, was eine sehr gute Nachricht ist, da die meisten in der Praxis auftauchenden Räume Hausdorff-Räume sind.

Satz 3.35. In einem Hausdorff-Raum ist der Grenzwert jeder konvergenten Folge eindeutig.

Beweis. Sei X ein Hausdorff-Raum und $(x_n)_n$ eine konvergente Folge in X . Nehme an, es gebe $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so dass $(x_n)_n$ gegen x und gegen y konvergieren würde. Nach Definition von Konvergenz würde dann jede Umgebung von U und jede Umgebung von V fast alle Folgenglieder enthalten.

Da X Hausdorff-Raum ist, gibt es jedoch Umgebungen U von x und V von y , so dass $U \cap V = \emptyset$, so dass also höchstens eine der beiden Umgebungen fast alle Folgenglieder enthalten kann. Dies ist ein Widerspruch, also ist der Grenzwert der Folge eindeutig. $\square$

3.4 Existenz stetiger Funktionen

In den Grundvorlesungen zur Analysis haben wir viele stetige Abbildungen auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ kennengelernt und auf unterschiedliche Weisen stetige Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$ konstruiert. Für allgemeine topologische Räume kann die Existenz stetiger Abbildungen ein hochgradig komplexes Problem darstellen. Eine der grundlegenden Fragen dabei ist die nach der stetigen Fortsetzbarkeit von Abbildungen.

Frage 1: Seien X und Y topologische Räume, $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \rightarrow Y$ stetig. Gibt es eine stetige Abbildung $F : X \rightarrow Y$ mit $F|_A = f$?

Das folgende Beispiel zeigt, dass dies nicht immer der Fall sein muss.

Beispiel 3.36. Sei $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Dann gibt es *kein* stetiges $F : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ mit $F|_{\{0, 1\}} = f$, da $[0, 1]$ zusammenhängend ist und deshalb nach Satz 3.4 jedes solche F konstant sein müsste.

Grundsätzlich ist Frage 1 leider zu allgemein, um sie kurz zu beantworten. Es gibt jedoch viele Resultate, die Aussagen über Spezialfälle machen. Wir wollen uns nun den folgenden elementaren Spezialfall genauer ansehen.

Frage 2: Sei X ein topologischer Raum und seien $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Gibt es eine stetige Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in A$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in B$?

Auf einem metrischen Raum (X, d) lautet die Antwort auf Frage 2 stets ja. Betrachten wir für $A \subset X$ abgeschlossen die Funktion $d_A : X \rightarrow \mathbb{R}$, $d_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$, so können wir in Frage 2 die Funktion

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)},$$

wählen.

Andererseits lautet die Antwort auf Frage 2 nicht immer ja: Ist f eine Funktion wie in Frage 2 verlangt, so sind $U := f^{-1}([0, \frac{1}{3}))$ und $V := f^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$ offene Teilmengen mit

$A \subset U, B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$. Existiert ein solches f also für alle A und B , so folgt, dass X normal sein muss.

Das Lemma von Urysohn, welches wir als nächstes betrachten wollen, sagt aus, dass diese Bedingung aber schon hinreichend ist, um Frage 2 positiv zu beantworten.

Satz 3.37 (Lemma von Urysohn). *Ein topologischer Raum X ist genau dann normal, wenn es zu je zwei abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ eine stetige Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$ gibt, so dass $f(x) = 0$ für alle $x \in A$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in B$.*

Beweis. Die Rückrichtung haben wir gerade bereits diskutiert, es bleibt also nur die Hinrichtung zu zeigen. Dazu wollen wir zunächst eine Familie $(U_r)_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ offener Mengen mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

- (i) $A \subset U_r \subset \bar{U}_r \subset X \setminus B$ für alle $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$,
- (ii) sind $p, q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ mit $p < q$, so ist $\bar{U}_p \subset U_q$.

Wir wollen induktiv vorgehen. Wähle dazu eine Bijektion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, $k \mapsto r_k$. (Diese existiert, da $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ abzählbar ist.) Nehme an, dass $r_1 = 0$ und $r_2 = 1$, wähle $U_0 \subset X$ offen, so dass $A \subset U_0 \subset \bar{U}_0 \subset X \setminus B$ und setze $U_1 := X \setminus B$. Ein solches U_0 existiert nach Satz 3.34. Für $k \geq 3$ definieren wir die Menge U_{r_k} rekursiv. Nehme an, dass bereits Mengen $\{U_{r_1}, \dots, U_{r_{k-1}}\}$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) gewählt seien und setze

$$r_- := \max\{r_j \mid r_j < r_k, 1 \leq j \leq k-1\}, \quad r_+ := \min\{r_j \mid r_j > r_k, 1 \leq j \leq k-1\}.$$

Wende Satz 3.34 auf $\bar{U}_{r_-}$ und U_{r_+} an und erhalte eine offene Menge U_{r_k} mit

$$\bar{U}_{r_-} \subset U_{r_k} \subset \bar{U}_{r_+} \subset U_{r_+}.$$

Man überprüft leicht, dass die durch dieses Verfahren erhaltene Familie $\{U_r\}_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ wohldefiniert ist und die Eigenschaften (i) und (ii) hat. Weiterhin setzen wir $U_r := \emptyset$ für $r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0)$ und $U_r := X$ für $r \in \mathbb{Q} \cap (1, +\infty)$ und erhalten damit eine Familie $(U_r)_{r \in \mathbb{Q}}$.

Definiere nun mit Hilfe dieser Familie eine Funktion durch

$$f : X \rightarrow [0, 1], \quad f(x) := \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid x \in U_r\}.$$

Ist $x \in A$, so ist $x \in U_0$, so dass $f(x) = 0$ für alle $x \in A$. Ist $x \in B$, so ist $x \in U_r$ genau dann wenn $r > 1$, also ist $f(x) = 1$.

Wir wollen nun zeigen, dass f stetig ist. Nach Beispiel 2.16.(3), Satz 2.17 und der Definition der Unterraumtopologie reicht es hierfür zu zeigen, dass $f^{-1}([0, a))$ und $f^{-1}((a, 1])$ für alle $a \in [0, 1]$ offen in X sind. Sei nun $a \in [0, 1]$ fest gewählt. Es folgt direkt aus der Definition der Familie und der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, dass $f(x) < a$ genau dann wenn es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $r < a$ gibt, so dass $x \in U_r$. Also ist

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, a)} U_r,$$

welches als Vereinigung offener Mengen wieder offen ist.

Behauptung: Es gilt $f(x) \leq a \Leftrightarrow x \in \bar{U}_r \quad \forall r \in \mathbb{Q} \text{ mit } r > a$.

Beweis der Behauptung: „ $\Rightarrow$ “: Ist $s \in \mathbb{Q}$ mit $s > a$, so ist $f(x) < s$, also gibt es nach obigem Argument ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $r < s$, so dass $x \in U_r$. Nach Eigenschaft (ii) der Familie folgt, dass $x \in U_s \subset \bar{U}_s$, was wir zeigen wollten.

„ $\Leftarrow$ “: Sei $s \in \mathbb{Q}$ mit $s > a$ beliebig. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < s$, so dass nach Annahme $x \in \bar{U}_r \subset U_s$, woraus wieder $f(x) < s$ folgt. Da $s > a$ beliebig, folgt die Behauptung. ■

Nach dieser Behauptung gilt für jedes $a \in [0, 1]$, dass

$$f^{-1}((a, 1]) = X \setminus f^{-1}([0, a]) = X \setminus \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap (a, 1]} \bar{U}_r.$$

Da beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, folgt die Offenheit von $f^{-1}((a, 1])$. Also ist f stetig. □

Eine der wichtigsten Formen des Lemmas von Urysohn für den späteren Gebrauch wollen wir explizit formulieren.

Korollar 3.38. Sei X ein normaler Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $U \subset X$ offen mit $A \subset U$. Dann existiert ein stetiges $f : X \rightarrow [0, 1]$ mit $f(x) = 1$ falls $x \in A$ und $f(x) = 0$ falls $x \notin U$.

Beweis. Wende das Lemma von Urysohn auf A und $X \setminus U$ an. □

Mit Hilfe des Lemmas von Urysohn lässt sich nun eine teilweise Antwort auf Frage 1 für den Fall $Y = \mathbb{R}$ geben. Im Beweis des nächsten Satz werden wir folgendes einfache Lemma benötigen.

Lemma 3.39. Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ mit der Unterraumtopologie versehen und sei $B \subset A$ abgeschlossen. Dann ist B abgeschlossen in X .

Beweis. Nach Annahme ist $A \setminus B$ offen in A , also gibt es nach Definition der Unterraumtopologie ein $U \subset X$ offen mit $U \cap A = A \setminus B$. Dann ist $X \setminus B = (X \setminus A) \cup U$ als Vereinigung offener Mengen offen, also ist B abgeschlossen in X . □

Satz 3.40 (Fortsetzungssatz/Erweiterungssatz von Tietze). Sei X ein normaler Raum und $A \subset X$ abgeschlossen.

a) Sei $f : A \rightarrow [a, b]$ stetig. Dann gibt es eine stetige Funktion $F : X \rightarrow [a, b]$, so dass $F|_A = f$.

b) Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine stetige Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F|_A = f$.

Beweis. a) Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $[a, b] = [0, 1]$, da alle kompakten Intervalle homöomorph zueinander sind. Nach Lemma 3.39 sind $f^{-1}([0, \frac{1}{3}])$ und $f^{-1}([\frac{2}{3}, 1])$ abgeschlossen in X und offensichtlich disjunkt. Nach dem Lemma von Urysohn finden wir daher eine stetige Funktion

$$g_1 : X \rightarrow [0, \frac{1}{3}], \text{ so dass } g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in A \text{ und } 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3} & \text{falls } x \in A \text{ und } \frac{2}{3} \leq f(x) \leq 1. \end{cases}$$

Diese wollen wir als sehr grobe Näherung an f betrachten und sie mit einem iterierten Verfahren weiter verfeinern. Sei $f_1 : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1 := f - g_1$, der „Fehler“ dieser Näherung. Dann ist nach Konstruktion $0 \leq f_1(x) \leq \frac{2}{3}$. Wenden wir erneut das Lemma von Urysohn auf die Mengen $f^{-1}([0, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}])$ und $f^{-1}([\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}, 1])$ an, so liefert dieses eine stetige Funktion $g_2 : X \rightarrow [0, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}]$, so dass

$$g_2 : X \rightarrow [0, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}], \text{ so dass } g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in A \text{ und } 0 \leq f_1(x) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} & \text{falls } x \in A \text{ und } f_1(x) \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Setzen wir $f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 := f_1 - g_2$, so ist nach Konstruktion $0 \leq f_2(x) \leq (\frac{2}{3})^2$ für alle $x \in A$. Dieses Verfahren können wir nun induktiv fortsetzen.

Sei für $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n : A \rightarrow [0, (\frac{2}{3})^n]$ gegeben. Durch Anwendung des Lemmas von Urysohn finden wir eine Funktion $g_{n+1} : X \rightarrow [0, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$, so dass

$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in A \text{ und } 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, \\ \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n & \text{falls } x \in A \text{ und } (\frac{2}{3})^{n+1} \leq f_n(x) \leq (\frac{2}{3})^n. \end{cases}$$

Setze dann $f_{n+1} : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f_{n+1} := f_n - g_{n+1}$, so dass nach Konstruktion $0 \leq f_{n+1}(x) \leq (\frac{2}{3})^{n+1}$ für alle $x \in A$. Mit den durch dieses Verfahren erhaltenen Funktionen betrachten wir die Funktionenreihe

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

Da $\|g_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist die Reihe normal und damit gleichmäßig konvergent, also ist F wohldefiniert und damit nach einem Satz aus der Analysis¹ stetig, da die g_n stetig sind. Es bleibt zu zeigen, dass $F(x) = f(x)$ für alle $x \in A$. Sei $x \in A$ fest gewählt. Da nach Konstruktion

$$g_1(x) = f(x) - f_1(x), \quad g_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x) \quad \forall n \geq 2,$$

erhalten wir für festes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n g_k(x) \right| = |f_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n.$$

¹Dieser Satz überträgt sich vollkommen analog auf allgemeine topologische Räume, siehe etwa Bredon, *Topology and Geometry*, Theorem I.2.12, S. 6.

Folglich ist

$$|f(x) - F(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n g_k(x) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$

also $F|_A = f$.

- b) Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ ein Homöomorphismus (zum Beispiel $h(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$) und betrachte $\tilde{f} := h \circ f : A \rightarrow (-1, 1)$. Nach Teil a) können wir eine stetige Funktion $G : X \rightarrow [-1, 1]$ finden, so dass $G|_A = \tilde{f}$. Wir können jedoch nicht einfach h^{-1} auf G anwenden, da G nun die Werte -1 und 1 annehmen kann. Sei $D := G^{-1}(\{-1\}) \cup G^{-1}(\{1\})$. Da G stetig ist, ist D abgeschlossen, außerdem ist $A \cap D = \emptyset$. Nach dem Lemma von Urysohn können wir daher ein stetiges $g : X \rightarrow [0, 1]$ finden, so dass $g(x) = 0$ für alle $x \in D$ und $g(x) = 1$ für alle $x \in A$. Folglich ist $g \cdot F$ eine weitere stetige Funktion, die auf A mit $\tilde{f}$ übereinstimmt, jedoch nur Werte in $(-1, 1)$ annimmt, so dass

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := h^{-1}(g(x) \cdot G(x)),$$

die gesuchte stetige Fortsetzung von f darstellt.

□

3.5 Metrisierbarkeit

Wir haben zu Beginn der Vorlesung gesehen, dass metrische Räume stets topologische Räume sind. In diesem Abschnitt wollen wir uns anschauen, was sich über die umgekehrte Richtung aussagen lässt.

Frage: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Unter welchen Bedingungen gibt es eine Metrik d auf X , so dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$?

Man überlegt sich leicht, dass nicht jede Topologie von einer Metrik erzeugt wird. Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung dafür ist, dass die Topologie dieselben topologischen Eigenschaften erfüllt wie Topologien metrischer Räume. Falls die Topologie auf X von einer Metrik induziert wird, so muss sie also konkret die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

- X ist erstabzählbar,
- X ist Hausdorff-Raum,
- X ist normal.

Insbesondere folgt daraus, dass die indiskrete Topologie auf Mengen mit mindestens zwei Elementen sowie die Topologie der „Geraden mit zwei Ursprüngen“ nicht von Metriken erzeugt werden, da diese keine Hausdorff-Räume sind.

Definition 3.41. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar*, wenn $\mathcal{T}$ von einer Metrik auf X induziert wird.

Beispiel 3.42. Betrachte die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}$. Diese ist metrisierbar, genauer ist eine Metrik, die die Produkttopologie erzeugt (Übung), gegeben durch

$$d : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)}.$$

Es gibt mehrere Metrisierbarkeitssätze, in welchen hinreichende Bedingungen dafür gefunden werden, dass eine Topologie metrisierbar ist. Den bekanntesten dieser Sätze wollen wir im Folgenden herleiten, wozu wir eine neue Eigenschaft einführen.

Definition 3.43. Ein topologischer Raum *erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom* / *ist zweitabzählbar*, wenn seine Topologie eine Basis besitzt, die aus abzählbar vielen Mengen besteht.

Bemerkung 3.44. Wie man sich leicht überlegt, ist jeder zweitabzählbare Raum erstabzählbar.

Beispiel 3.45. $\mathbb{R}^n$ ist zweitabzählbar. Eine abzählbare Basis der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\{B_r(q) \mid q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)\}.$$

Der folgende Satz ist einer von mehreren Metrisierbarkeitssätzen, von denen wir hier nur den einen behandeln wollen.

Satz 3.46 (Metrisierbarkeitssatz von Urysohn). *Sei X ein normaler Hausdorff-Raum. Wenn X zweitabzählbar ist, dann ist X metrisierbar.*

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis der Topologie auf X und sei

$$\mathcal{S} := \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mid \bar{U} \subset V\}.$$

Da X normal ist, gibt es nach dem Lemma von Urysohn für alle $(U, V) \in \mathcal{S}$ eine stetige Funktion

$$f_{U,V} : X \rightarrow [0, 1], \text{ so dass } f_{U,V}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \bar{U}, \\ 0 & \text{falls } x \in X \setminus V. \end{cases}$$

Wähle eine Familie solcher Funktionen und setze $\mathcal{F} := \{f_{U,V} \mid (U, V) \in \mathcal{S}\}$. Da $\mathcal{B}$ abzählbar ist, sind $\mathcal{S}$ und damit $\mathcal{F}$ wieder abzählbar. Sei $\mathcal{F} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine beliebige Abzählung von $\mathcal{F}$ und betrachte die Abbildung

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad f(x) = (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Nach der universellen Eigenschaft der Produkttopologie (Satz 2.21) ist f stetig. Weiterhin ist f injektiv: sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so gibt es, da X Hausdorff-Raum ist, eine offene Umgebung U von x und eine offene Umgebung V von y mit $U \cap V = \emptyset$. Da

$\mathcal{B}$ Basis der Topologie ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $U \in \mathcal{B}$. Da X normaler Hausdorff-Raum ist, gibt es nach Satz 3.31 und Satz 3.34 ein offenes $U' \subset X$ mit $x \in U' \subset \bar{U}' \subset U$. Dann gibt es wiederum ein $B \in \mathcal{B}$, so dass $x \in B \subset U'$ und damit auch $\bar{B} \subset U$. Also ist $(B, U) \in \mathcal{S}$ und nach Konstruktion ist $f_{B,U}(x) = 1$ und $f_{B,U}(y) = 0$. Also ist $f(x) \neq f(y)$, folglich ist f injektiv.

Weiterhin ist f als Abbildung $X \rightarrow f(X)$ offen: sei nämlich $U \subset X$ offen und sei $z_0 \in f(U)$. Dann gibt es $x_0 \in U$ mit $f(x_0) = z_0$. Nach Konstruktion von f können wir ein $n \in \mathbb{N}$ finden, so dass $f_n(x_0) > 0$ und $f_n(x) = 0$ für alle $x \in X \setminus U$. Sei dann $\text{pr}_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_k)_k \mapsto x_n$, die Projektion und sei $V := \text{pr}_n^{-1}((0, +\infty))$. Nach Definition der Produkttopologie ist V offen in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, also ist $W := V \cap f(X)$ offen in $f(X)$. Ist $z \in W$ beliebig und $x \in X$ beliebig mit $f(x) = z$, so gilt nach Definition von W , dass $f_n(x) = (\text{pr}_n \circ f)(x) = \text{pr}_n(z) > 0$, also folgt nach Wahl von f_n , dass $x \in U$ und damit $z \in f(U)$. Folglich ist $W \subset f(U)$, also ist $f(U)$ offen in $f(X)$.

Zusammen mit der Stetigkeit und der Injektivität folgt, dass f eine Einbettung ist, also wird X homöomorph auf $f(X) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ abgebildet. Insbesondere ist X homöomorph zu einem Unterraum eines metrischen Raums und damit metrisierbar. $\square$

Bemerkung 3.47. Der Metrisierbarkeitssatz von Urysohn lässt sich von normalen auf *vollständig reguläre* Räume verallgemeinern. Diese Eigenschaft wollen wir in dieser Vorlesung nicht behandeln und verweisen dafür auf G. Bredon, *Topology and Geometry*, Kapitel I, Abschnitt 9.

3.6 Vollständigkeit metrischer Räume

In diesem Abschnitt wollen wir uns auf metrische Räume konzentrieren. Wir erinnern uns an folgende Begriffe aus der Analysis II.

Definition 3.48. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0.$$

(X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in (X, d) konvergent ist.

Weiter wissen wir aus der Analysis II, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist und kennen folgende Beispiele für (un)vollständige metrische Räume:

Beispiel 3.49. (1) $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik ist vollständig ist, $\mathbb{Q}^n$ mit der Einschränkung der euklidischen Metrik hingegen unvollständig.

(2) Ist X ein topologischer Raum, so sind

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{R}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt}\} \text{ und } C_b^0(X, \mathbb{R}) := C^0(X, \mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$$

mit der Supremumsnorm $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in X} |f(x)|$ vollständige normierte Vektorräume und deshalb auch vollständige metrische Räume. $(C^1([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ ist hingegen unvollständig.

Die Vollständigkeit einer Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums lässt sich leicht überprüfen.

Lemma 3.50. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$. $(A, d|_{A \times A})$ ist genau dann vollständig, wenn A abgeschlossen in X ist.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A , die in X konvergiert. Dann ist $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in X und damit auch in A . Da A vollständig ist, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$. Damit folgt aus Satz 1.32, dass $\bar{A} = A$, also ist A abgeschlossen.

„ $\Leftarrow$ “: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in A . Dann ist $(x_n)_n$ auch Cauchy-Folge in X und da X vollständig ist, konvergiert diese in X . Da A abgeschlossen ist, gilt wieder nach Satz 1.32, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \bar{A} = A$, also ist A vollständig. $\square$

Wir wollen als Nächstes zeigen, dass wir jeden metrischen Raum zu einem vollständigen metrischen Raum „ergänzen“ können, wozu wir zunächst einen allgemeinen topologischen Begriff einführen.

Definition 3.51. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ liegt *dicht* in X , wenn $\bar{A} = X$.

Satz 3.52. Sei X ein topologischer Raum. $A \subset X$ liegt genau dann dicht in X , wenn $A \cap U \neq \emptyset$ für jedes offene $U \subset X$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.23. $\square$

Beispiel 3.53. (1) $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$. Allgemeiner liegt $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) $[0, 1)$ und $(0, 1)$ liegen dicht in $[0, 1]$.

Definition 3.54. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein vollständiger metrischer Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ heißt *Vervollständigung* von (X, d) , wenn es eine Einbettung $i : X \hookrightarrow \hat{X}$ gibt, so dass $i(X)$ dicht in $\hat{X}$ liegt und $\hat{d}(i(x), i(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

Satz 3.55. a) Jeder metrische Raum besitzt eine Vervollständigung.

b) Sind $(\hat{X}_1, \hat{d}_1)$ und $(\hat{X}_2, \hat{d}_2)$ Vervollständigungen von (X, d) mit Einbettungen $i_1 : X \hookrightarrow \hat{X}_1$ und $i_2 : X \hookrightarrow \hat{X}_2$, so gibt es einen Homöomorphismus $\varphi : \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}_2$, so dass $\varphi \circ i_1 = i_2$ und

$$\hat{d}_2(\varphi(x), \varphi(y)) = \hat{d}_1(x, y) \quad \forall x, y \in \hat{X}_1.$$

Beweis. a) Sei $x_0 \in X$ fest gewählt. Für $a \in X$ definieren wir

$$\phi_a : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_a(x) = d(x, a) - d(x, x_0).$$

Nach der Dreiecksungleichung ist $|\phi_a(x)| \leq d(x_0, a)$ für alle $x \in X$, also ist $\phi_a \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Die folgende Abbildung ist daher wohldefiniert:

$$\Phi : X \rightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \quad \Phi(a) = \phi_a.$$

Φ ist injektiv, denn es gilt:

$$\Phi(a) = \Phi(b) \Leftrightarrow \phi_a(x) = \phi_b(x) \forall x \in X \Leftrightarrow d(x, a) = d(x, b) \forall x \in X \Leftrightarrow a = b,$$

wobei letzteres durch Einsetzen von $x = a$ folgt.

Sei d_∞ die von der Supremumsnorm induzierte Metrik auf $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $a, b \in X$, dass

$$d_\infty(\Phi(a), \Phi(b)) = \sup_{x \in X} |\phi_a(x) - \phi_b(x)| = \sup_{x \in X} |d(x, a) - d(x, b)| \leq d(a, b).$$

Da jedoch gilt, dass $|\phi_a(a) - \phi_b(a)| = |d(a, a) - d(a, b)| = d(a, b)$, folgt

$$d_\infty(\Phi(a), \Phi(b)) = d(a, b).$$

Daraus folgert man leicht, dass Φ stetig ist und X homöomorph auf $\Phi(X)$ abbildet, also ist Φ eine Einbettung von X in einen vollständigen metrischen Raum. Setzen wir $\widehat{X} := \overline{\Phi(X)}$ und $\widehat{d} := d_\infty|_{\widehat{X} \times \widehat{X}}$, so ist $(\widehat{X}, \widehat{d})$ nach Lemma 3.50 vollständig und die Einbettung $i : X \hookrightarrow \widehat{X}, i(a) = \phi_a$, hat die gewünschten Eigenschaften. Also ist $(\widehat{X}, \widehat{d})$ eine Vervollständigung von (X, d) .

b) Dies ist eine Aufgabe auf Übungsblatt 5.

□

Bemerkung 3.56. Während die Vervollständigung eines metrischen Raumes bis auf Homöomorphie eindeutig ist, muss dies für die Vervollständigungen zweier homöomorpher Räume nicht gelten. Es gibt homöomorphe metrische Räume, deren Vervollständigungen *nicht* homöomorph sind, wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei $X_1 = \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie. $\mathbb{R}$ ist vollständig, also ist $\widehat{X}_1 = \mathbb{R}$. Andererseits ist X_1 homöomorph zu $X_2 = \{(\frac{1}{x}, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, +\infty)\}$, man überlege sich jedoch, dass $\widehat{X}_2 = X_2 \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \not\approx \widehat{X}_1$.

Wir wollen dieses Kapitel mit einem Satz über vollständige metrische Räume beenden, der wichtige Anwendungen in der Funktionalanalysis und in der Differentialtopologie besitzt.

Wir beobachten zunächst, dass im Allgemeinen ein Schnitt dichter Teilmengen keine dichte Teilmenge mehr sein muss. Sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$, jedoch ist $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$.

Definition 3.57. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $R \subset X$ heißt *residuell*, wenn sie ein Durchschnitt abzählbar vieler offener dichter Teilmengen ist, wenn es also offene und dichte Teilmengen $U_n \subset X, n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$R = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Der folgende Satz ist historisch als *Bairescher Kategoriensatz* bekannt. Das Wort Kategorie hat in diesem Zusammenhang jedoch nichts mit Kategorientheorie zu tun, mit der wir uns noch beschäftigen wollen. Um Verwechslungen vorzubeugen, kürzen wir deshalb den Namen des Satzes etwas ab.

Satz 3.58 (Satz von Baire). *In einem vollständigen metrischen Raum liegt jede residuelle Menge dicht.*

Beweis. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie offener dichter Teilmengen von X . Setze $R := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Zu zeigen ist nach Satz 3.52, dass $R \cap U \neq \emptyset$ für jedes offene $U \subset X$. Sei ein solches U fest gewählt und konstruiere durch folgendes Verfahren eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- Da G_1 offen und dicht in X ist, ist $U \cap G_1$ offen und nichtleer. Daher können wir $x_1 \in X$ und $0 < \varepsilon_1 < 1$ finden, so dass mit $B_1 := B_{\varepsilon_1}(x_1)$ gilt, dass $\bar{B}_1 \subset U \cap G_1$.
- Da G_2 offen und dicht und B_1 offen ist, ist $B_1 \cap G_2$ offen und nichtleer. Also können wir dann $x_2 \in X$ und $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ finden, so dass mit $B_2 := B_{\varepsilon_2}(x_2)$ gilt, dass $\bar{B}_2 \subset B_1 \cap G_2$.
- Sei $n \geq 3$ und sei B_{n-1} eine gegebene nichtleere offene Menge. Da G_n offen und dicht ist, ist $B_{n-1} \cap G_n$ offen und nichtleer. Also können wir dann $x_n \in X$ und $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$ finden, so dass mit $B_n := B_{\varepsilon_n}(x_n)$ gilt, dass $\bar{B}_n \subset B_{n-1} \cap G_n$.

Da $B_n \subset B_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, folgt, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Da X vollständig ist, konvergiert diese und wir setzen $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Da für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x_n \in B_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$, folgt $x \in \bar{B}_n$ für alle $n \geq 2$. Da $\bar{B}_n \subset U \cap B_{n-1} \subset G_{n-1}$, folgt $x \in U \cap G_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (U \cap G_n) \subset U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = U \cap R.$$

Also ist $U \cap R \neq \emptyset$ und da U beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. $\square$

Um uns von der Nützlichkeit dieses Satzes zu überzeugen, werden wir uns eine Anwendung anschauen.

Satz 3.59. *Die Menge der nirgends differenzierbaren stetigen Funktionen $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ liegt dicht in $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.*

Beweis. Wir werden dies durch Anwendung des Satzes von Baire im vollständigen metrischen Raum $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$ beweisen. Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei

$$U_{m,n} := \left\{ f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid \forall t \in [0, 1] \exists s \in (t - \frac{1}{m}, t + \frac{1}{m}) \setminus \{t\} \text{ s.t. } \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|} > n \right\}.$$

Behauptung 1. Jedes $U_{m,n}$ ist offen in $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Behauptung 2. Jedes $U_{m,n}$ liegt dicht in $C^0([0,1], \mathbb{R})$.

Bevor wir diese Behauptungen beweisen, wollen wir zeigen, wie aus ihnen die Behauptung des Satzes hervorgeht. Setze $R := \bigcap_{m,n \in \mathbb{N}} U_{m,n}$. Nach den beiden Behauptungen ist R residuell und damit nach Satz von Baire dicht in $C^0([0,1], \mathbb{R})$, es reicht also zu zeigen, dass R aus nirgends differenzierbaren Funktionen besteht.

Sei $f \in R$ beliebig und nehme an, es gebe ein $t \in [0,1]$, so dass f in t differenzierbar ist. Dann existiert $\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(s) - f(t)}{s - t}$, also ist $C_m < \infty$ für hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$, wobei

$$C_m := \sup_{s \in (t - \frac{1}{m}, t + \frac{1}{m}) \setminus \{t\}} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|}.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch, da dann für $n > C_m$ gelten würde, dass $f \notin U_{m,n}$. Also ist f nirgends differenzierbar. Es bleiben nur noch die beiden Behauptungen zu beweisen.

Beweis von Behauptung 1. Setze $A_{m,n} := C^0([0,1], \mathbb{R}) \setminus U_{m,n}$ und sei $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $A_{m,n}$, die gegen $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ konvergiert. Dann gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $t_i \in [0,1]$, so dass $\frac{|f_i(s) - f_i(t_i)|}{|s - t_i|} \leq n$ für alle $s \in (t_i - \frac{1}{m}, t_i + \frac{1}{m})$ mit $s \neq t_i$. Nach Satz von Bolzano-Weierstraß hat $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge und wir nehmen o.B.d.A. an, dass die Folge selbst gegen $t \in [0,1]$ konvergiert. Daraus und aus der Konvergenz von $(f_n)_n$ folgt, dass $\frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|} \leq n$ für alle $s \in (t - \frac{1}{m}, t + \frac{1}{m})$ erfüllt ist. Also ist $f \in A_{m,n}$, so dass $A_{m,n}$ abgeschlossen und damit $U_{m,n}$ offen ist, was zu zeigen war.

Beweisidee für Behauptung 2. Für jedes $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ und jedes $\varepsilon > 0$ können wir eine stückweise lineare Funktion $g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ finden, so dass $\|f - g\| < \varepsilon$. Man zeigt nun, dass man indem man die Intervalle, auf denen g linear ist, hinreichend klein wählt, dies stets so hinbekommen kann, dass die Steigung auf einem hinreichend kleinen Teilstück beliebig groß, also insbesondere größer als n wird, womit $g \in U_{m,n} \cap B_\varepsilon(f)$ folgt. Siehe etwa Bredon, Topology and Geometry, Abschnitt I.17, Corollary 17.6. $\square$

Eine weitere Anwendung des Satzes von Baire wollen wir hier nur angeben. Das Resultat und seinen Beweis findet man in: G. Bredon, Topology and Geometry, Abschnitt I.17, Corollary 17.4, Seite 58.

Satz 3.60. Seien X und Y metrische Räume, sei X vollständig und sei $(f_n : X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Abbildungen. Falls $(f_n)_n$ punktweise gegen $f : X \rightarrow Y$ konvergiert, so liegt die Menge der Punkte, in denen f stetig ist, dicht in X .

Kapitel 4

Kompaktheit

Nachdem wir im letzten Kapitel verschiedene Eigenschaften topologischer Räume betrachtet haben, wollen wir uns in diesem Kapitel auf eine besonders wichtige Eigenschaft und ihre Anwendungen konzentrieren: die Kompaktheit topologischer Räume. Wir fassen Kompaktheit als eine Art verallgemeinerte Endlichkeitsbedingung auf und auch, wenn ihre Definition sehr abstrakt und schwer zu überprüfen ist, werden wir leichter nachzuvollziehende Kriterien für die Kompaktheit von Räumen herleiten.

Zwischendurch werden wir einige Beispiele für interessante Verklebungen von Räumen betrachten, bei denen die Kompaktheit nützlich sein wird um zu zeigen, dass gewisse Abbildungen Identifizierungen sind.

Außerdem werden wir in einem eigenen Abschnitt Mengen stetiger Abbildungen zwischen topologischen Räumen mit einer Topologie versehen, die einige „natürliche“ Eigenschaften hat und die mit Hilfe kompakter Mengen definiert wird.

4.1 Überdeckungen und Kompaktheit

Bevor wir zur Kompaktheit kommen, wollen wir zunächst den Begriff der Überdeckung von Räumen betrachten, auf dem der Kompaktheitsbegriff aufbaut.

Definition 4.1. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von X heißt *Überdeckung von A in X* , wenn $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Ist $J \subset I$, so heißt $(U_j)_{j \in J}$ *Teilüberdeckung* von $(U_i)_{i \in I}$, wenn sie eine Überdeckung von A ist. Ist $A = X$, so nennen wir $(U_i)_{i \in I}$ eine *Überdeckung von X* .

Eine Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X heißt *offen (abgeschlossen)*, wenn U_i für jedes $i \in I$ offen (abgeschlossen) in X ist. Weiter heißt $(U_i)_{i \in I}$ *endlich*, wenn I endlich ist, wenn sie also aus endlich vielen Mengen besteht.

Überdeckungen tauchen in der Topologie an allen Stellen auf, bei denen die Grundidee ist, einen topologischen Raum in einfachere Unterräume zu zerlegen und diese lokal zu untersuchen. Ein wichtiges Hilfsmittel bei solchen Betrachtungen, das wir zwar zunächst nicht benötigen, aber dennoch kurz besprechen wollen, ist dabei das folgende Resultat.

Satz 4.2 (Verklebungslemma). Seien X und Y topologische Räume, sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X und sei $(f_i : U_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen, für die gelte, dass

$$f_i(x) = f_j(x) \quad \forall x \in U_i \cap U_j, \quad i, j \in I.$$

Falls $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung oder eine lokal endliche abgeschlossene Überdeckung ist, so gibt es eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für jedes $i \in I$.

Beweis. Zunächst folgt mit elementarer Mengenlehre, dass es unter den Voraussetzungen des Satzes eine eindeutige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gibt, so dass $f(x) = f_i(x)$ für alle $x \in U_i$, $i \in I$. Ist $(U_i)_{i \in I}$ offen, so folgt die Behauptung leicht aus der Tatsache, dass f genau dann stetig ist, wenn f in jedem Punkt stetig ist, indem man mit offenen Umgebungen argumentiert.

Sei nun $(U_i)_{i \in I}$ eine endliche abgeschlossene Überdeckung. Sei $A \subset Y$ abgeschlossen in Y . Aus der Definition von f folgert man leicht, dass $U_i \cap f^{-1}(A) = f_i^{-1}(A)$ für alle $i \in I$. Da $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung ist, gilt

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{i \in I} U_i \cap f^{-1}(A) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(A).$$

Da die f_i stetig sind und A abgeschlossen ist, ist $f_i^{-1}(A)$ abgeschlossen in U_i und damit nach Lemma 3.39 abgeschlossen in X . Also ist $f^{-1}(A)$ als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen. Damit ist f nach Satz 1.25 stetig. $\square$

Definition 4.3. Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von K in X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Bemerkung 4.4. (1) Nach Definition der Unterraumtopologie ist $K \subset X$ genau dann kompakt, wenn K mit der Unterraumtopologie kompakt ist.

(2) In Teilen der Literatur heißt ein Raum mit der obigen Eigenschaft *quasi-kompakt*. Ein kompakter Raum ist in diesen Büchern und Arbeiten dann ein quasi-kompakter Raum, der zusätzlich Hausdorff-Raum ist.

Beispiel 4.5. (1) Ist X ein topologischer Raum, so ist $\{x\}$ für jedes $x \in X$ kompakt.

(2) Eine Menge X mit der diskreten Topologie ist genau dann kompakt, wenn X endlich ist.

(3) Jede Menge X mit der indiskreten Topologie ist kompakt.

(4) Sei X ein topologischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $x \in X$ konvergiere. Dann ist $K := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt: Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X so wähle $i_0 \in I$ mit $x \in U_{i_0}$. Da $(x_n)_n$ gegen x konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U_{i_0}$ für alle $n \geq n_0$. Für jedes $j \in \{1, 2, \dots, n_0 - 1\}$ wähle nun $i_j \in I$ mit $x_j \in U_{i_j}$. Dann ist $K \subset \bigcup_{j=0}^{n_0-1} U_{i_j}$, woraus die Kompaktheit von K folgt.

- (5) Ein nichttrivialer normierter Vektorraum V ist niemals kompakt, da etwa die offene Überdeckung

$$\{B_r(0) \subset V \mid r > 0\}$$

keine endliche Teilüberdeckung von V besitzt.

Satz 4.6. *Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten topologischen Raums ist kompakt.*

Beweis. Sei X ein kompakter Raum, $A \subset X$ abgeschlossen $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie in X offener Mengen mit $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Dann ist $X = \bigcup_{i \in I} U_i \cup (X \setminus A)$ eine offene Überdeckung, also gibt es $J \subset I$ endlich mit $X = \bigcup_{j \in J} U_j \cup (X \setminus A)$ und damit $A \subset \bigcup_{j \in J} U_j$. Da die Familie beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. $\square$

Kompaktheit hat einige interessante Konsequenzen, wenn sie in Kombination mit der Hausdorff-Eigenschaft auftritt, wie wir in den folgenden Resultaten sehen werden.

Satz 4.7. *Sei X ein Hausdorff-Raum und seien $A, B \subset X$ kompakt mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es offene Teilmengen $U, V \subset X$ mit $A \subset U$, $B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.*

Beweis. Sei zunächst $q \in B$ fest gewählt. Da X ein Hausdorff-Raum ist, gibt es für jedes $p \in A$ offene Teilmengen $U_{p,q}, V_{p,q} \subset X$ mit $p \in U_{p,q}$, $q \in V_{p,q}$ und $U_{p,q} \cap V_{p,q} = \emptyset$. Seien solche Mengen für jedes $p \in A$ fest gewählt. Dann ist $(U_p)_{p \in A}$ eine offene Überdeckung von A in X und da A kompakt ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n \in A$, so dass $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{p_i,q} =: U_q$. Setzen wir $V_q := \bigcap_{i=1}^n V_{p_i,q}$, so haben wir also für jedes $q \in B$ offene Teilmengen $U_q, V_q \subset X$ mit $A \subset U_q$, $q \in V_q$ und $U_q \cap V_q = \emptyset$. Dann ist $(V_q)_{q \in B}$ eine offene Überdeckung von B in X . Da B kompakt ist, gibt es $q_1, \dots, q_m \in B$ mit $B \subset \bigcup_{j=1}^m V_{q_j}$. Setzen wir dann $V := \bigcup_{j=1}^m V_{q_j}$ und $U := \bigcap_{j=1}^m U_{q_j}$, so haben U und V die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Korollar 4.8. *Kompakte Hausdorff-Räume sind normal.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 4.6 und Satz 4.7. $\square$

Aus der Analysis II ist uns der Satz von Heine-Borel bekannt (den wir im nächsten Abschnitt als Spezialfall einer allgemeineren Aussage beweisen werden), welcher besagt, dass eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. In allgemeinen topologischen Räumen macht diese Aussage zunächst keinen Sinn, da Beschränktheit nur auf metrischen Räumen definiert ist. Im Allgemeinen hat Kompaktheit zwar mit diesen beiden Begriffen zu tun, die Beziehung zwischen ihnen ist jedoch komplizierter, wie wir im Folgenden sehen werden.

Satz 4.9. *Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raums ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei X ein Hausdorff-Raum und $K \subset X$ kompakt. Dann gibt es nach Satz 4.7 für jedes $p \in X \setminus K$ eine offene Umgebung U_p von p mit $U_p \cap K = \emptyset$, also $U_p \subset X \setminus K$. Folglich ist $X \setminus K = \bigcup_{p \in X \setminus K} U_p$ als Vereinigung offener Mengen offen, also ist K abgeschlossen. $\square$

Bemerkung 4.10. In Räumen, die keine Hausdorff-Räume sind, müssen kompakte Mengen nicht abgeschlossen sein. Ist X eine Menge mit mindestens zwei Elementen und mit der indiskreten Topologie versehen, so ist $\{x\}$ für jedes $x \in X$ zwar kompakt, aber nicht abgeschlossen.

Definition 4.11. Eine Teilmenge A eines metrischen Raums X heißt *beschränkt*, wenn es $x_0 \in X$ und $R > 0$ gibt, so dass $A \subset B_R(x_0)$.

Satz 4.12. Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist beschränkt.

Beweis. Sei X metrischer Raum, $K \subset X$ und $x_0 \in K$. Dann ist $(B_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine offene Überdeckung von X , also gibt es, da K kompakt, insbesondere $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^r B_{n_j}(x_0) = B_N(x_0)$, wobei $N := \max\{n_1, \dots, n_r\}$. Also ist K beschränkt. $\square$

Das folgende Resultat über kompakte Mengen und stetige Abbildungen ist eine zentrale Aussage über Kompaktheit und wird in den Beweisen fast aller folgenden Resultate in diesem Abschnitt benötigt.

Satz 4.13. Seien K und Y topologische Räume und sei $f : K \rightarrow Y$ stetig. Ist K kompakt, so ist $f(K)$ kompakt.

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$ in Y . Da f stetig ist, ist dann $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K in X . Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, sei also $J \subset I$ endlich mit $K \subset \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j) = f^{-1}(\bigcup_{j \in J} U_j)$. Damit folgt

$$f(K) \subset f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} U_j\right)\right) \subset \bigcup_{j \in J} U_j,$$

woraus die Kompaktheit von $f(K)$ folgt. $\square$

Korollar 4.14. Seien X und Y zwei topologische Räume. Ist X kompakt und homöomorph zu Y , so ist Y kompakt. (Kompaktheit ist also eine topologische Eigenschaft.)

Korollar 4.15. Jeder Quotientenraum eines kompakten Raums ist kompakt.

Beweis. Wende Satz 4.13 auf die kanonische Projektion an. $\square$

Korollar 4.16. Auf einem kompakten topologischen Raum nimmt jede stetige reelle Funktion ihr Maximum und ihr Minimum an.

Beweis. Sei X kompakt und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Nach Satz 4.13 ist $f(X)$ kompakt und damit nach 4.12 beschränkt in $\mathbb{R}$, also sind $\sup f(X), \inf f(X) \in \mathbb{R}$. Da $f(X)$ nach Satz 4.9 abgeschlossen ist, sind $\sup f(X), \inf f(X) \in f(X)$, also werden Maximum und Minimum angenommen. $\square$

Satz 4.17. Eine stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorff-Raum ist abgeschlossen.

Beweis. Sei X kompakt, Y Hausdorff-Raum und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so ist A nach Satz 4.6 kompakt. Folglich ist $f(A)$ nach Satz 4.13 eine kompakte Teilmenge von Y und damit nach Satz 4.9 abgeschlossen in Y , da Y Hausdorff-Raum ist. $\square$

Korollar 4.18. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung von einem kompakten topologischen Raum in einen Hausdorff-Raum.

- a) Ist f bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus.
- b) Ist f injektiv, so ist f eine Einbettung.
- c) Ist f surjektiv, so ist f eine Identifizierung.

Beweis. a) und b) folgen aus Satz 4.17 und Satz 2.5, c) folgt aus Satz 4.17 und Satz 2.30. $\square$

Durch Korollar 4.18 erhalten wir zum ersten Mal ein Kriterium an eine stetige bijektive Abbildung, mit der wir ganz ohne Betrachtung der Umkehrabbildung zeigen können, dass es sich um einen Homöomorphismus handelt. Dies wird sich als sehr nützlich herausstellen, wie wir in späteren Beispielen sehen werden.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem allgemeinen Verfahren, mit dem sich jeder topologische Raum durch Hinzufügen eines einzigen Punktes in einen kompakten Raum verwandeln kann.

Definition 4.19. Sei X ein topologischer Raum, Für eine beliebige einelementige Menge $\{\infty\}$ sei $X_+ := X \sqcup \{\infty\}$ und sei

$$\mathcal{T}_+ := \{U \subset X \mid U \text{ ist offen in } X\} \cup \{V \subset X_+ \mid \infty \in V, X_+ \setminus V \text{ ist kompakt in } X\}.$$

$\mathcal{T}_+$ ist eine Topologie auf X_+ (Übung) und $(X_+, \mathcal{T}_+)$ heißt die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* oder *Alexandroff-Kompaktifizierung* von X .

Beispiel 4.20. Aus der Funktionentheorie kennen wir die Riemannsche Zahlensphäre $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Diese ist gerade die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Topologie.

Satz 4.21. Für jeden topologischen Raum X ist die Ein-Punkt-Kompaktifizierung X_+ kompakt.

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X_+ und sei $i_0 \in I$ mit $\infty \in U_{i_0}$. Dann ist $K := X_+ \setminus U_{i_0}$ kompakt in X . Da X offen in X_+ ist, ist $(X \cap U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von X_+ mit $K \subset \bigcup_{i \in I} X \cap U_i$. Da die Inklusion $X \hookrightarrow X_+$ offensichtlich eine Einbettung und da K kompakt ist, gibt es $J \subset I$ endlich mit

$$K \subset \bigcup_{j \in J} X \cap U_j \subset \bigcup_{j \in J} U_j.$$

Folglich ist $(U_j)_{j \in J \cup \{i_0\}}$ eine endliche Teilüberdeckung von X_+ . $\square$

4.2 Folgenkompaktheit

Aus der Analysis II kennen wir bereits den Begriff der Folgenkompaktheit, welcher für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ äquivalent zur Kompaktheit ist. In diesem Abschnitt wollen wir Folgenkompaktheit für beliebige topologische Räume definieren und das allgemeine Verhältnis zur Kompaktheit im Sinne des letzten Abschnitts untersuchen.

Definition 4.22. Ein topologischer Raum X heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

Wie schon beim Vergleich von Stetigkeit und Folgenstetigkeit stellt sich heraus, dass für die Verbindungen der beiden Kompaktheitsbegriffe Abzählbarkeitseigenschaften vonnöten sind.

Lemma 4.23. Sei X ein kompakter topologischer Raum. Dann besitzt jede unendliche Teilmenge $S \subset X$ einen Häufungspunkt, d.h. es gibt ein $x \in X$, so dass für jede Umgebung U von x gilt, dass $(U \setminus \{x\}) \cap S \neq \emptyset$.

Beweis. Falls $S \subset X$ unendlich ist und keinen Häufungspunkt besäße, so hätte jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U_x , so dass $(U_x \setminus \{x\}) \cap S = \emptyset$. Dann wäre $(U_x)_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von X , so dass es nach Annahme ein endliches $E \subset X$ gäbe, so dass $X = \bigcup_{x \in E} U_x$. Dann würde aber $S \subset E$ folgen, was ein Widerspruch ist, da S unendlich ist. Also hat S einen Häufungspunkt. $\square$

Satz 4.24. Jeder erstabzählbare kompakte Hausdorff-Raum ist folgenkompakt.

Beweis. Sei X ein erstabzählbarer kompakter Hausdorff-Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Nehme an, dass die Folge unendlich viele Werte annimmt, da wir sonst eine konstante und damit konvergente Teilfolge finden können. Nach Lemma 4.23 hat $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ einen Häufungspunkt $x \in X$. Da X erstabzählbar ist, können wir eine abzählbare Familie $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Umgebungen von x finden, so dass $U_{n+1} \subset U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und so dass jede offene Umgebung von x eine der U_n enthält. Zunächst können wir $n_1 \in \mathbb{N}$ finden mit $x_{n_1} \in U_1$. Sind bereits Zahlen $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ gegeben, so können wir, da x Häufungspunkt ist, ein $n_{k+1} > n_k$ finden mit $x_{n_{k+1}} \in U_{k+1}$. Die auf diese Weise erhaltene Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ erfüllt $x_{n_k} \in U_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und mit einem Standardargument folgt, dass $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert. Also ist X folgenkompakt. $\square$

Satz 4.25. Jeder zweitabzählbare folgenkompakte Raum ist kompakt.

Beweis. Sei X zweitabzählbar und folgenkompakt und sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Da X zweitabzählbar ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass I abzählbar ist, sei also im Folgenden $I = \mathbb{N}$. Angenommen, es gäbe keine endliche Teilüberdeckung von $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Dann gäbe es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $x_n \in X \setminus (\bigcup_{i=1}^n U_i)$. Da X folgenkompakt ist, hätte dann $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Sei x Grenzwert dieser Teilfolge und sei $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_m$. Da die Teilfolge konvergiert,

gäbe es dann $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_k} \in U_m$ für alle $k \geq k_0$. Dies ist jedoch ein Widerspruch, da $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$, da aber nach Konstruktion $x_{n_k} \notin U_m$ für alle $n_k \geq m$ sein müsste. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung. $\square$

Korollar 4.26. *Ein zweitabzählbarer Hausdorff-Raum ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 4.24 und Satz 4.25, da jeder zweitabzählbare Raum erstabzählbar ist. $\square$

Wir werden uns nun metrische Räume genauer anschauen und zeigen, dass die beiden Kompaktheitsbegriffe auch dort äquivalent sind.

Definition 4.27. Ein metrischer Raum heißt *total beschränkt*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ die Überdeckung $(B_\varepsilon(x))_{x \in X}$ von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt..

Satz 4.28. *Für einen metrischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) X ist kompakt.
- (ii) X ist folgenkompakt.
- (iii) X ist vollständig und total beschränkt.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Dies ist ein Spezialfall von Satz 4.24.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Ist X folgenkompakt, so besitzt insbesondere jede Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, also ist X vollständig. Angenommen, X wäre nicht total beschränkt, es gäbe also ein $\varepsilon > 0$, so dass $(B_\varepsilon(x))_{x \in X}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Konstruiere nun iterativ eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie folgt: Sei $x_1 \in X$ ein beliebiger Punkt. Gegeben $x_1, \dots, x_n$ wähle $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$ beliebig. Diese Folge ist wohldefiniert und erfüllt nach Konstruktion $d(x_k, x_n) \geq \varepsilon$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \neq n$. Also kann $(x_n)_n$ keine Teilfolge besitzen, die eine Cauchy-Folge ist und damit insbesondere keine konvergente Teilfolge, was im Widerspruch zur Annahme steht. Also ist X total beschränkt.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei X vollständig und total beschränkt und nehme an, dass es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ gäbe, die keine endliche Teilüberdeckung besäße.

Wir definieren nun rekursiv eine Folge abgeschlossener Mengen $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$,
- (2) $\text{diam } K_n \leq \frac{2}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- (3) Keines der K_n kann durch eine endlich viele der $(U_i)_{i \in I}$ überdeckt werden.

wie folgt: Da X total beschränkt ist, gibt es insbesondere ein endliches $E_1 \subset X$, so dass $X = \bigcup_{x \in E_1} B_1(x)$. Dann gibt es ein $x_1 \in E_1$, so dass $(U_i)_{i \in I}$ keine endliche Teilüberdeckung von $K_1 := \bar{B}_1(x_1)$ besitzt. Nehme an, dass für $n \geq 2$ Mengen $K_1, \dots, K_{n-1}$

gegeben sind mit $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_{n-1}$, so dass $(U_i)_{i \in I}$ keine endliche Teilüberdeckung von K_{n-1} besitzt. Da X total beschränkt ist, gibt es ein endliches $E_n \subset X$, so dass $X = \bigcup_{x \in E_n} B_{1/n}(x)$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $x_n \in E_n$, so dass $(U_i)_{i \in I}$ keine endliche Teilüberdeckung von $K_n := \bar{B}_{1/n}(x_n) \cap K_{n-1}$ besitzt. Wählen wir nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in K_n$, so ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wegen (1) und (2) eine Cauchy-Folge in X und analog zum Beweis des Satzes von Baire konvergiert diese gegen ein $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Sei nun $i_0 \in I$ mit $y \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(y) \subset U_{i_0}$. Wegen (2) gibt es dann jedoch ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K_n \subset B_\varepsilon(y) \subset U_{i_0}$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu (3), also folgt die Kompaktheit von X . $\square$

Hieraus können wir nun eine Aussage folgern, die aus der Analysis II schon bekannt sein sollte.

Korollar 4.29 (Satz von Heine-Borel). *Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Dies folgt aus Satz 4.9 und Satz 4.12.

„ $\Leftarrow$ “: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. Nach Lemma 3.50 ist A mit der Einschränkung der euklidischen Metrik ein vollständiger metrischer Raum. Weiterhin ist jede beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ total beschränkt. Ist nämlich $R > 0$ so groß gewählt, dass $A \subset [-R, R]^n$, so gilt für jedes $\varepsilon > 0$, dass $A \subset \bigcup_{x \in Q_\varepsilon} B_\varepsilon(x)$, wobei

$$Q_\varepsilon := \left\{ \left(\frac{k_1 \varepsilon}{2}, \dots, \frac{k_n \varepsilon}{2} \right) \in \mathbb{R}^n \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}, |k_i| \leq \frac{2R}{\varepsilon} \forall 1 \leq i \leq n \right\},$$

welche endlich ist. Also ist A nach Satz 4.28 kompakt. $\square$

Mit dem Satz von Heine-Borel und den in diesem und dem vorherigen Abschnitt gezeigten Aussagen können wir nun lauter Beispiele für kompakte Räume finden.

Beispiel 4.30. (1) S^n und D^n sind für alle $n \in \mathbb{N}$ kompakt.

(2) $\mathbb{R}P^n$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ kompakt. Dies folgt aus Korollar 4.15 und Aufgabe 1 von Übungsblatt 3.

(3) Da $[0, 1]^2$ kompakt in $\mathbb{R}^2$ ist, sind die vier Quotientenräume aus Beispiel 2.35, also insbesondere der Torus, das Möbiusband und die Kleinsche Flasche, kompakt.

4.3 Beispiele zu Identifizierungen kompakter Räume

Mit diesen Beobachtungen aus den letzten beiden Abschnitten können wir nun einige kleine Lücken aus den Beispielen der vorigen Kapitel schließen und weitere nicht ganz offensichtliche Homöomorphismen konstruieren.

Satz 4.31. *Seien die Äquivalenzrelationen $\sim_1$ und $\sim_3$ auf $[0, 1]^2$ definiert wie in Beispiel 2.35 und seien M_1 und M_3 die zugehörigen Quotientenräume.*

a) M_1 ist homöomorph zu $S^1 \times [0, 1]$.

b) M_3 ist homöomorph zu $S^1 \times S^1$.

Beweis. Wir betrachten im Folgenden S^1 als Einheitskreis in $\mathbb{C}$.

a) Sei $f : [0, 1]^2 \rightarrow S^1 \times [0, 1]$, $f(s, t) = (e^{i2\pi s}, t)$. Dann ist f offensichtlich surjektiv und stetig. Da $[0, 1]^2$ kompakt und $S^1 \times [0, 1]$ Hausdorff-Raum ist, ist f nach Korollar 4.18.c) eine Identifizierung. Wie man leicht sieht, ist $f(s, t) = f(s', t')$ genau dann, wenn $(s, t) \sim_1 (s', t')$. Also folgt die Behauptung aus Korollar 2.33.

b) Dies folgt vollkommen analog zu a) mit Hilfe der Abbildung

$$g : [0, 1]^2 \rightarrow S^1 \times S^1, \quad g(s, t) = (e^{i2\pi s}, e^{i2\pi t}).$$

□

Lemma 4.32. Seien X, Y, Z topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen. Ist $g \circ f$ eine Identifizierung, so ist g eine Identifizierung.

Beweis. Sei $U \subset Z$, so dass $g^{-1}(U)$ offen in Y ist. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ offen in X . Da $g \circ f$ eine Identifizierung ist, ist folglich U offen in Z . Da g stetig ist, folgt daraus, dass g eine Identifizierung ist. □

Das folgende Resultat hatten wir in Beispiel 2.37 bereits angekündigt.

Satz 4.33. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $D^n / S^{n-1} \approx S^n$.

Beweis. Wir werden Identifizierungen von $S^{n-1} \times [-1, 1]$ in beide Räume konstruieren. Sei zunächst

$$f : S^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow S^n, \quad f(x_1, \dots, x_n, t) = ((1-t^2)^{\frac{1}{2}}x_1, (1-t^2)^{\frac{1}{2}}x_2, \dots, (1-t^2)^{\frac{1}{2}}x_n, t).$$

Man rechnet leicht nach, dass f wohldefiniert und surjektiv ist. Weiterhin ist g stetig und da $S^{n-1} \times [-1, 1]$ abgeschlossen und beschränkt und damit nach Satz von Heine-Borel kompakt und S^n ein Hausdorff-Raum ist, ist f nach Satz 4.17 abgeschlossen und damit nach Satz 2.30 eine Identifizierung. Betrachte nun

$$g : S^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow D^n, \quad g(x, t) = \frac{t+1}{2} \cdot x \quad \forall x \in S^{n-1}, t \in [-1, 1].$$

Man rechnet leicht nach, dass g stetig und surjektiv ist und wie bei f folgt, dass g eine Identifizierung ist. Sind $(x, t) \neq (y, s) \in S^{n-1} \times [-1, 1]$, so ist

$$g(x, t) = g(y, s) \quad \Leftrightarrow \quad s = t = -1$$

sowie

$$f(x, t) = f(y, s) \quad \Leftrightarrow \quad s = t \in \{-1, 1\}.$$

Insbesondere gilt also

$$g(x, t) = g(y, s) \Rightarrow f(x, t) = f(y, s),$$

also gibt es nach Korollar 2.29 ein stetiges $h : D^n \rightarrow S^n$ mit $f = h \circ g$. Da f Identifizierung ist, ist nach Lemma 4.32 auch h eine Identifizierung. Damit gilt nach Korollar 2.33, dass $S^n \approx D^n / \sim_h$. Man überlegt sich jedoch leicht anhand der obigen Rechnungen, dass $x \sim_h y$ genau dann gilt, wenn $x, y \in S^{n-1}$, also folgt die Behauptung. $\square$

Schließlich wollen wir das Möbiusband genauer untersuchen und in der Folge eine Verbindung zwischen Möbiusband und $\mathbb{R}P^2$ herstellen. Der folgende Satz gibt uns alternative Möglichkeiten, das Möbiusband zu beschreiben. Hierbei ist klar, dass M_1 das in Beispiel 2.35 beschriebene Möbiusband ergibt, da wir lediglich die Kanten des Quadrats anders parametrisiert haben.

Satz 4.34. *Betrachte die Quotientenräume*

$$\begin{aligned} M_1 &= [-1, 1]^2 / \sim_1, \quad \text{wobei } \sim_1 \text{ definiert sei durch } (1, t) \sim_1 (-1, -t) \quad \forall t \in [-1, 1], \\ M_2 &= (S^1 \times [-1, 1]) / \sim_2, \quad \text{wobei } \sim_2 \text{ def. durch } (z, t) \sim_2 (-z, -t) \quad \forall (z, t) \in S^1 \times [-1, 1], \\ M_3 &= (S^1 \times [0, 1]) / \sim_3, \quad \text{wobei } \sim_3 \text{ definiert sei durch } (z, 0) \sim_3 (-z, 0) \quad \forall z \in S^1. \end{aligned}$$

Dann ist $M_1 \approx M_2 \approx M_3$.

Beweis. Sei im Folgenden $\pi_2 : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow M_2$ die kanonische Projektion. Betrachte $f : [-1, 1]^2 \rightarrow S^1 \times [-1, 1]$, $f(s, t) = (e^{i\frac{\pi}{2}s}, t)$. Nach Satz 4.17 ist f abgeschlossen, damit überlege man sich, dass $g := \pi_2 \circ f : [-1, 1]^2 \rightarrow M_2$ eine surjektive und stetige und damit nach Korollar 4.18.c) eine Identifizierung ist.

Man rechnet nun ohne Problem nach, dass $g(s, t) = g(s', t')$ genau dann erfüllt ist, wenn $(s, t) \sim_1 (s', t')$, also folgt aus Korollar 2.29, dass $M_1 \approx M_2$.

Sei $i : S^1 \times [0, 1] \hookrightarrow S^1 \times [-1, 1]$ die Inklusion und sei $h := \pi_2 \circ i : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M_2$. Wie im anderen Schritt ist h eine Identifizierung. Offensichtlich gilt für $(z, t) \neq (z', t') \in S^1 \times [0, 1]$, dass $h(z, t) = h(z', t')$ genau dann, wenn $(z, t) \sim_2 (z', t')$ genau dann, wenn $t = t' = 0$ und $z = -z'$, also genau dann, wenn $(z, t) \sim_3 (z', t)$. Also folgt aus Korollar 2.33, dass $M_2 \approx M_3$. $\square$

Satz 4.35. *Sei M_3 gegeben wie im vorigen Satz mit kanonischer Projektion $\pi_3 : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M_3$ und sei $\alpha : S^1 \rightarrow M_3$, $\alpha(z) = \pi_3(z, 1)$. Dann ist*

$$\mathbb{R}P^2 \approx D^2 \cup_\alpha M_3.$$

Beweis. Mit Aufgabe 1 von Übungsblatt 3 folgt, dass die Abbildung $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$, $\pi(x) = \mathbb{R}x$, eine Identifizierung ist. Sei nun $f : D^2 \rightarrow S^2$, $f(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, die Abbildung auf die „Nordhalbkugel“ und sei $\tilde{f} := \pi \circ f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$. Offensichtlich ist $\tilde{f}$ stetig und man rechnet leicht nach, dass $\tilde{f}$ surjektiv ist. Nach Aufgabe 6 von Übungsblatt 4 ist $\mathbb{R}P^2$ Hausdorff-Raum, also ist $\tilde{f}$ nach Korollar 4.18 eine Identifizierung.

Sei $g : D^2 \sqcup (S^1 \times [0, 1]) \rightarrow D^2$ gegeben durch

$$g(z) = \frac{z}{2} \quad \forall z \in D^2, \quad g(z, t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)z \quad \forall (z, t) \in S^1 \times [0, 1].$$

g ist surjektiv und stetig und nach Korollar 4.18.c) eine Identifizierung. Damit ist

$$F_1 := \tilde{f} \circ g : D^2 \sqcup (S^1 \times [0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}P^2$$

als Verknüpfung von Identifizierungen eine Identifizierung (Übung).

Sei $h : D^2 \sqcup (S^1 \times [0, 1]) \rightarrow D^2 \sqcup M_3$, gegeben durch

$$h(x) = x \quad \forall x \in D^2, \quad h(x) = \pi_3(x) \quad \forall x \in S^1 \times [0, 1].$$

Analog zu den obigen Abbildungen folgt, dass h eine Identifizierung ist. Sei schließlich $q : D^2 \sqcup M_3 \rightarrow D^2 \cup_\alpha M_3$ die kanonische Projektion. Dann ist

$$F_2 := q \circ h : D^2 \sqcup (S^1 \times [0, 1]) \rightarrow D^2 \cup_\alpha M_3$$

Verknüpfung von Identifizierungen wieder Identifizierung. Mit den Definitionen der Abbildungen rechnet man nach, dass

$$F_1(x) = F_1(x') \quad \Leftrightarrow \quad F_2(x) = F_2(x') \quad \forall x, x' \in D^2 \sqcup (S^1 \times [0, 1]),$$

also folgt die Behauptung aus Satz 2.31. □

4.4 Lokal kompakte Räume

Wir werden in diesem Abschnitt eine Eigenschaft von Räumen besprechen, die viele nützliche Konsequenzen hat, wie wir am Ende des Abschnitts sowie im nächsten Abschnitt sehen werden.

Definition 4.36. Ein topologischer Raum X heißt *lokal kompakt*, wenn es für jedes $x \in X$ und jede Umgebung U von x ein kompaktes $K \subset U$ gibt, so dass $x \in K \subset U$.

Beispiel 4.37. (1) $\mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt: Ist $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$, so ist $\bar{B}_{\varepsilon/2}(x)$ eine kompakte Umgebung von x , die in U liegt.

(2) $\mathbb{R}^\mathbb{N} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ ist *nicht* lokal kompakt: Ist $K \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$ kompakt und $\text{pr}_n : \mathbb{R}^\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf den n -ten Faktor, so wäre dann $\text{pr}_n(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls K Umgebung eines Punktes wäre, so müsste K insbesondere ein U aus der Produkttopologie enthalten, für diese gilt jedoch, dass $\text{pr}_n(U) = \mathbb{R}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Also enthält K keine offene Menge.

Wie schon bei der Kompaktheit zeigt sich auch bei lokal kompakten Räumen, dass man in Kombination mit der Hausdorff-Eigenschaft praktische Resultate herleiten kann.

Satz 4.38. Ein Hausdorff-Raum X ist genau dann lokal kompakt, wenn jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung besitzt.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “ ist trivial, es bleibt also nur „ $\Leftarrow$ “ zu zeigen. Sei $x \in X$ und $U \subset X$ eine offene Umgebung von x . Wir wissen, dass x eine kompakte Umgebung $K \subset X$ besitzt. Nach Definition der Unterraumtopologie ist $U \cap K$ offen in K , also ist $K \setminus U$ abgeschlossen in K und damit nach Satz 4.6 kompakt. Nach Satz 4.7 gibt es daher offene Teilmengen $V, W \subset U$ mit $x \in V$, $K \setminus U \subset W$ und $V \cap W = \emptyset$. Dann ist $L := K \setminus W$ abgeschlossen in K und damit kompakt, außerdem ist $x \in L \subset U$ nach Konstruktion und wegen $K \cap V \subset L$ ist L eine Umgebung von x . Also ist X lokal kompakt. $\square$

Korollar 4.39. Jeder kompakte Hausdorff-Raum ist lokal kompakt.

Korollar 4.40. Jede offene oder abgeschlossene Teilmenge eines lokal kompakten Hausdorff-Raums ist lokal kompakt.

Beweis. Für offene Teilmengen folgt dies direkt aus der Definition. Sei nun X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Ist $x \in A$ und $K \subset X$ kompakte Umgebung von x , so ist $K' := K \cap A$ abgeschlossen und damit nach Satz 4.6 kompakt mit $x \in K'$. Ist U offen in X mit $x \in U \cap K$, so ist $U \cap A$ offen in A mit $x \in U \cap A \subset K'$, also ist K' kompakte Umgebung von x . Die Behauptung folgt aus Satz 4.38. $\square$

Der folgende Satz ist eine Hilfe zum besseren Verständnis des Begriffs der lokalen Kompaktheit, da er zeigt, dass die Idee hinter Kompaktheit etwas „Endlichdimensionales“ ist.

Satz 4.41. Ein normierter Vektorraum ist genau dann lokal kompakt, wenn er endlichdimensional ist.

Beweis. „ $\Leftarrow$ “: Sei V ein n -dimensionaler normierter Vektorraum, wobei $n \in \mathbb{N}$. Sei $(v_1, \dots, v_n)$ und sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ der eindeutige Isomorphismus von Vektorräumen mit $\Phi(e_i) = v_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Wie man leicht sieht, ist Φ ein Homöomorphismus, so dass $\Phi(\bar{B}_1(\Phi^{-1}(v)))$ für jedes $v \in V$ eine kompakte Umgebung von v ist. Die Behauptung folgt aus Satz 4.38.

„ $\Rightarrow$ “: Sei K eine kompakte Umgebung von $0 \in V$. Dann ist auch $\lambda \cdot K$ eine kompakte Umgebung von 0 für jedes $\lambda > 0$. Damit sieht man, dass die Familie $(x + \frac{1}{2^n}K)_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K ist. Da K kompakt ist, gibt es ein endliches $S \subset K$ mit $K \subset \bigcup_{x \in S} (x + \frac{1}{2^n}K)$, also kurz: $K \subset S + \frac{1}{2^n}K$. Sei W der von S erzeugte Untervektorraum, welcher endlichdimensional ist. Dann ist $K \subset W + \frac{1}{2^n}K$ und durch Iteration dieser Inklusion erhalten wir

$$K \subset W + \frac{1}{2}K \subset W + \frac{1}{2}(W + \frac{1}{2}K) = W + \frac{1}{4}K \subset \dots \Rightarrow K \subset W + 2^{-n}K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun U eine offene Umgebung von K . Für jedes $x \in K$ gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n}x \in U$. Aus der Kompaktheit von K folgert man (Übung), dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $2^{-n}K \subset U$, womit folgt, dass

$$K \subset W + U.$$

Da dies für jede beliebige Umgebung U von 0 gilt, folgt $K \subset \overline{W}$. Man überzeuge sich jedoch (Übung), dass jeder endlichdimensionale Untervektorraum abgeschlossen in V ist, also folgt $K \subset W$. Damit folgt auch $\text{span}(K) \subset W$, da K aber eine offene Umgebung von 0 enthält, ist $V = \text{span}(K)$, folgt $V = W$, so dass V endlichdimensional ist. $\square$

Satz 4.42. *Ein Hausdorff-Raum X ist genau dann lokal kompakt, wenn seine Ein-Punkt-Kompaktifizierung X_+ ein Hausdorff-Raum ist.*

Beweis. „ $\Leftarrow$ “: Ist X_+ Hausdorff-Raum, so ist X_+ nach Korollar 4.39 lokal kompakt. Da X offen in X_+ ist, ist X nach Korollar 4.40 lokal kompakt.

„ $\Rightarrow$ “: Da X selbst Hausdorff-Raum ist, folgt aus der Definition der Topologie auf X_+ , dass es zu je zwei $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen U von x und V von y gibt mit $U \cap V = \emptyset$. Es bleibt zu zeigen, dass sich $x \in X$ und ∞ stets in X_+ durch offene Umgebungen trennen lassen. Sei $x \in X$ beliebig. Da X lokal kompakt ist, gibt es eine kompakte Umgebung K von x in X . Sei dann $U \subset K$ offen in X mit $x \in U$ und sei $V := X_+ \setminus K$. Dann sind U und V offen in X_+ mit $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ und $\infty \in V$. Also ist X_+ Hausdorff-Raum. $\square$

Das folgende Lemma werden wir im Anschluss benutzen, um einen Satz, der uns in Kapitel 3 bereits begegnet ist, auf lokal kompakte Hausdorff-Räume zu übertragen.

Lemma 4.43. *Sei X ein topologischer Raum und $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie nichtleerer kompakter und abgeschlossener Teilmengen von X mit $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \dots$. Dann ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.*

Beweis. Angenommen, es wäre $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n := K_1 \setminus K_n$. Dann ist jedes der U_n offen in K_1 und es ist

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = K_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = K_1.$$

Da K_1 kompakt ist, gibt es $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ mit $K_1 = \bigcup_{i=1}^m U_{n_i}$. Ist $N := \max\{n_1, \dots, n_m\}$, so gilt wegen der Schachtelungseigenschaft der K_n , dass $\bigcup_{i=1}^m U_{n_i} = U_N$, also $K_1 = U_N$ und damit $K_N = K_1 \setminus U_N = \emptyset$, was im Widerspruch zur Annahme steht. Also folgt die Behauptung. $\square$

Wir zeigen nun, dass die Aussage des Satzes von Baire nicht nur für vollständige metrische Räume (Satz 3.58), sondern auch für lokal kompakte Hausdorff-Räume gültig ist. Der Beweis ist dabei analog zum Fall vollständiger metrischer Räume, wobei wir das Vollständigkeitsargument durch Lemma 4.43 ersetzen.

Satz 4.44 (Satz von Baire/Bairescher Kategoriensatz, 2. Version). *In einem lokal kompakten Hausdorff-Raum liegt jede residuelle Menge dicht.*

Beweis. Sei X lokal kompakter Hausdorff-Raum und $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie offener dichter Teilmengen von X . Setze $R := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Zu zeigen ist, dass $R \cap U \neq \emptyset$ für jedes offene $U \subset X$. Sei ein solches U fest gewählt und konstruiere durch folgendes Verfahren eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen von X :

- Da G_1 offen und dicht in X ist, ist $U \cap G_1$ offen und nichtleer. Da X lokal kompakt ist, gibt es ein kompaktes $K_1 \subset U \cap G_1$ mit nichtleerem Inneren.
- Sei $n \geq 2$ und seien $K_1, \dots, K_{n-1}$ gegeben. Da G_n offen und dicht ist, ist $\overset{\circ}{K}_{n-1} \cap G_n$ offen und nichtleer. Also können wir ein kompaktes $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n-1} \cap G_n$ finden mit nichtleerem Inneren.

Da $K_n \subset K_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und X Hausdorff-Raum ist, gilt nach Lemma 4.43, dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Da nach Konstruktion $K_n \subset G_n \cap U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, folgt

$$R \cap U = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \cap U \neq \emptyset.$$

□

4.5 Räume stetiger Abbildungen

In der linearen Algebra haben wir gelernt, dass für je zwei Vektorräume V und W über demselben Körper $\mathbb{K}$ die Menge der linearen Abbildungen $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ wieder die Struktur eines $\mathbb{K}$ -Vektorraums besitzt, den wir wiederum mit Methoden der linearen Algebra untersuchen können.

Einer ähnlichen Philosophie wollen wir in diesem Abschnitt folgen. Für gegebene topologische Räume X und Y wollen wir den Raum der stetigen Abbildungen $C^0(X, Y)$ mit Topologien versehen.

Seien im Folgenden stets X und Y zwei topologische Räume. Folgende Abbildung ist offensichtlich injektiv:

$$\Phi : C^0(X, Y) \rightarrow \prod_{x \in X} Y, \quad \Phi(f) = (f(x))_{x \in X}.$$

Diese Abbildung gibt uns mit den Konstruktionen aus Kapitel 2 direkt die Möglichkeit, eine Topologie auf $C^0(X, Y)$ zu definieren.

Definition 4.45. Sei $\prod_{x \in X} Y$ mit der Produkttopologie versehen. Die *Topologie der punktweisen Konvergenz* auf $C^0(X, Y)$ ist die von Φ induzierte Topologie.

Der Name dieser Topologie ist durch die folgende Aussage begründet.

Satz 4.46. Seien X und Y topologische Räume und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C^0(X, Y)$ und sei $f \in C^0(X, Y)$. Dann gilt: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen f in der Topologie der punktweisen Konvergenz, wenn $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in X$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Beweis. Dies folgt leicht aus der Definition der Produkttopologie (Übung). □

Aus der Analysis wissen wir, dass punktweise Konvergenz von Folgen von Abbildungen auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ nicht besonders nützlich ist, da wichtige Eigenschaften wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit oder Integrierbarkeit nicht von der Folge auf die Grenzfunktion „vererbt“ werden.

Nach Definition der induzierten Topologie erhalten wir eine Basis der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $C^0(X, Y)$ durch Urbilder der Basis der Produkttopologie auf $\prod_{x \in X} Y$ unter Φ . Diese sind von der Form

$$W(x_1, \dots, x_m, U_1, \dots, U_m) = \{f \in C^0(X, Y) \mid f(x_i) \in U_i \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}\},$$

wobei $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in X$ und $U_1, \dots, U_m \subset Y$ offene Teilmengen. Wir legen also für endlich viele Punkte in X fest, dass sie in festgelegte offene Teilmengen abgebildet werden sollen. Diese Beobachtung soll nun die folgende Definition motivieren.

Definition 4.47. Für $K \subset X$ kompakt und $U \subset Y$ offen definieren wir

$$M(K, U) := \{f \in C^0(X, Y) \mid f(K) \subset U\}.$$

Die *Kompakt-offen-Topologie* (KO-Topologie) auf $C^0(X, Y)$ ist die von

$$\{M(K, U) \mid K \subset X \text{ kompakt, } U \subset Y \text{ offen}\}$$

(als Subbasis) erzeugte Topologie. (Hierbei ist klar, dass die $M(K, U)$ den Raum $C^0(X, Y)$ überdecken, da beispielsweise $M(\{x\}, Y) = C^0(X, Y)$ für beliebiges $x \in X$ gilt.)

Satz 4.48. Die KO-Topologie auf $C^0(X, Y)$ ist feiner als die Topologie der punktweisen Konvergenz.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass jedes der oben skizzierten Basiselemente der Topologie der punktweisen Konvergenz offen in der KO-Topologie ist. Dies folgt jedoch direkt, da in obiger Notation gilt, dass $W(x_1, \dots, x_m, U_1, \dots, U_m) = \bigcap_{i=1}^m M(\{x_i\}, U_i)$. $\square$

Ein guter Grund dafür, die KO-Topologie zu betrachten, ist die folgende Beobachtung, welche zeigt, dass die KO-Topologie die Vorstellung der gleichmäßigen Konvergenz verallgemeinert.

Satz 4.49. Ist X kompakter Hausdorff-Raum und (Y, d) ein metrischer Raum, so wird die KO-Topologie auf $C^0(X, Y)$ von der Metrik

$$d_\infty : C^0(X, Y) \times C^0(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)),$$

induziert.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass d_∞ aufgrund der Kompaktheit von X nur endliche Werte annimmt und deshalb wohldefiniert ist.

„ $\subset$ “: Es reicht zu zeigen, dass $M(K, U) \in \mathcal{T}(d_\infty)$ für alle $K \subset X$ kompakt und $U \subset Y$ offen. Sei $f \in M(K, U)$. Da U offen in Y ist, gibt es für jedes $x \in K$ ein $\varepsilon_x > 0$

mit $B_{\varepsilon_x}(f(x)) \subset U$. Die Familie $(B_{\varepsilon_x/2}(f(x)))_{x \in K}$ ist eine offene Überdeckung von $f(K)$. Da $f(K)$ nach Satz 4.13 kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_m \in K$, so dass $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\varepsilon_{x_i}/2}(f(x_i))$. Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_m}\}$. Ist nun $g \in C^0(X, Y)$ mit $d_\infty(f, g) < \frac{\varepsilon}{2}$, also $d(f(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in X$. Dann gibt es für alle $x \in K$ ein $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, so dass

$$d(g(x), f(x_i)) \leq d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon_{x_i}.$$

Nach Definition der ε_x folgt damit, dass $g(x) \in U$ für alle $x \in K$, also $g \in M(K, U)$. Damit haben wir gezeigt, dass $\tilde{B}_{\varepsilon/2}(f) \subset M(K, U)$, wobei $\tilde{B}$ die offenen Kugeln bezüglich d_∞ bezeichne. Da $f \in M(K, U)$ beliebig gewählt war, folgt $M(K, U) \in \mathcal{T}(d_\infty)$, was wir zeigen wollten.

„ $\supset$ “: Da die offenen Kugeln stets eine Basis der von einer Metrik induzierten Topologie bilden, reicht es zu zeigen, dass $\tilde{B}_\varepsilon(f)$ für alle $f \in C^0(X, Y)$ und $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $V \in \mathcal{T}_{\text{KO}}$ von f enthält. Seien f und ε im Folgenden fest gewählt und sei $U_y := B_{\varepsilon/2}(y)$ für alle $y \in Y$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U_{f(x)})$ offen in X für alle $x \in X$. Da X kompakter Hausdorff-Raum und damit nach Korollar 4.39 lokal kompakt ist, gibt es zu jedem $x \in X$ eine kompakte Umgebung K_x mit $K_x \subset f^{-1}(U_{f(x)})$, also $f(K_x) \subset U_{f(x)}$. Da X kompakt ist, gibt es ein endliches $E \subset X$, so dass $X = \bigcup_{e \in E} K_e$. Nach Konstruktion gilt dann

$$f \in V := \bigcap_{e \in E} M(K_e, U_{f(e)}).$$

V ist offen in der KO-Topologie. Sei nun $g \in V$ beliebig, $x \in X$ und sei $e \in E$ mit $x \in K_e$. Dann ist $g(x) \in U_{f(e)}$ und damit

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(e)) + d(f(e), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da $x \in X$ beliebig, folgt $g \in \tilde{B}_\varepsilon(f)$ und damit $V \subset \tilde{B}_\varepsilon(f)$. Also ist dieses V die gesuchte Umgebung. $\square$

Bemerkung 4.50. Wir wissen aus der Analysis, dass Konvergenz bezüglich der oben beschriebenen Metrik d_∞ nichts anderes ist als gleichmäßige Konvergenz. Ist also X ein kompakter Hausdorff-Raum und Y ein metrischer Raum, so konvergiert eine Folge in $C^0(X, Y)$ genau dann in der KO-Topologie, wenn sie gleichmäßig konvergiert.

Im Rest dieses Abschnitts wollen wir zeigen, dass die KO-Topologie viele hilfreiche Eigenschaften hat und dass gewisse „natürliche“ Abbildungen auf Abbildungsräumen bezüglich der KO-Topologie stetig sind. In den folgenden Betrachtungen nehmen wir stets an, dass alle Räume stetiger Abbildungen mit der KO-Topologie versehen sind.

Satz 4.51. Seien X, Y und Z topologische Räume.

a) Sei $f : Y \rightarrow Z$ stetig. Dann ist die folgende Abbildung stetig:

$$f_* : C^0(X, Y) \rightarrow C^0(X, Z), \quad f_*(g) = f \circ g.$$

b) Sei $f : Z \rightarrow X$ stetig. Dann ist die folgende Abbildung stetig.

$$f^* : C^0(X, Y) \rightarrow C^0(Z, Y), \quad f^*(g) = g \circ f.$$

Beweis. Nach Satz 2.17 reicht es zu zeigen, dass die Urbilder der besprochenen Subbasis der KO-Topologie wieder offen sind.

a) Sei $M(K, U) \subset C^0(X, Z)$ mit $K \subset X$ kompakt und $U \subset Z$ offen. Dann gilt:

$$g \in f_*^{-1}(M(K, U)) \Leftrightarrow (f \circ g)(K) \subset U \Leftrightarrow g(K) \subset f^{-1}(U) \Leftrightarrow g \in M(K, f^{-1}(U)).$$

Also ist $f_*^{-1}(M(K, U)) = M(K, f^{-1}(U))$ offen in $C^0(X, Y)$, wobei wir benutzt haben, dass f stetig und damit $f^{-1}(U)$ offen in Y ist. Also ist f_* stetig.

b) Sei $M(K, U) \subset C^0(Z, Y)$ mit $K \subset Z$ kompakt und $U \subset Y$ offen. Dann gilt:

$$g \in (f^*)^{-1}(M(K, U)) \Leftrightarrow g(f(K)) \subset U \Leftrightarrow g \in M(f(K), U).$$

Also ist $(f^*)^{-1}(M(K, U)) = M(f(K), U)$ offen in $C^0(X, Y)$, wobei wir benutzt haben, dass f stetig und damit $f(K)$ nach Satz 4.13 kompakt in X ist.

□

Zur Vorbereitung der nächsten Konstruktion schieben wir ein kleines, aber sehr nützliches Lemma ein.

Lemma 4.52 (Röhrenlemma („tube lemma“)). Seien X und Y topologische Räume und sei Y kompakt. Ist $x \in X$ und $V \subset X \times Y$ offen, so dass $\{x\} \times Y \subset V$, so gibt es eine offene Umgebung U von x in X mit $U \times Y \subset V$.

Beweis. Da die Produkte offener Mengen eine Basis der Topologie auf $X \times Y$ bilden, gibt es wegen $\{x\} \times Y \subset V$ für jedes $y \in Y$ offene Umgebungen U_y von x und V_y von y mit $U_y \times V_y \subset V$. Da Y kompakt ist, gibt es ein endliches $E \subset Y$, so dass $Y = \bigcup_{y \in E} V_y$. Setzen wir $U := \bigcap_{y \in E} U_y$, so ist U wieder offene Umgebung von x und es ist

$$U \times Y \subset \bigcup_{y \in E} (U_y \times V_y) \subset V.$$

□

Definition 4.53. Seien X, Y und Z topologische Räume und sei $f : X \times Y \rightarrow Z$ stetig. Die zu f adjungierte Abbildung ist die Abbildung

$$f^\# : X \rightarrow C^0(Y, Z), \quad (f^\#(x))(y) = f(x, y) \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

Betrachten wir die Abbildung $f^\#$ als Abbildung zwischen topologischen Räumen bezüglich der KO-Topologie, so lässt sich die folgende nützliche Aussage machen.

Satz 4.54. Seien X, Y und Z topologische Räume. Für jedes $f \in C^0(X \times Y, Z)$ ist $f^\# \in C^0(X, C^0(Y, Z))$.

Beweis. Nach Satz 2.17 reicht es zu zeigen, dass $(f^\#)^{-1}(M(K, V))$ für jedes kompakte $K \subset Y$ und jedes offene $V \subset Z$ offen in X ist. Sei $x \in (f^\#)^{-1}(M(K, V))$. Dann ist nach Konstruktion $f(\{x\} \times K) \subset V$, also $\{x\} \times K \subset f^{-1}(V)$. Durch Anwendung des Röhrenlemmas auf $f|_{X \times K}$ erhalten wir eine Umgebung U von x mit $f(U \times K) \subset V$, also $U \subset (f^\#)^{-1}(M(K, V))$. Also ist $f^\#$ stetig. $\square$

Satz 4.55 (Exponentialgesetz). Seien X, Y und Z topologische Räume. Ist Y lokal kompakt, so ist die Adjunktionsabbildung

$$\text{Ad} : C^0(X \times Y, Z) \rightarrow C^0(X, C^0(Y, Z)), \quad \text{Ad}(f) = f^\#,$$

eine Bijektion.

Beweis. Nach Satz 4.54 ist Ad wohldefiniert. Die Injektivität von Ad ist offensichtlich, es bleibt also nur die Surjektivität zu zeigen. Sei dazu $g \in C^0(X, C^0(Y, Z))$. Wir erhalten eine Abbildung $f : X \times Y \rightarrow Z$ durch $f(x, y) := (g(x))(y)$, wissen aber a priori nicht, ob f wieder stetig ist.

Seien $x \in X$ und $y \in Y$ fest gewählt und sei $V \subset Z$ eine offene Umgebung von $f(x, y)$. Dann ist $(g(x))^{-1}(V)$ offene Umgebung von y in Y und da Y lokal kompakt ist, gibt es eine kompakte Umgebung $K \subset Y$ von y mit $K \subset (g(x))^{-1}(V)$. Dann ist nach Konstruktion $g(x) \in M(K, V)$. Da g stetig ist, ist $U := g^{-1}(M(K, V))$ eine offene Umgebung von x . Dann ist jedoch $U \times K$ eine Umgebung von (x, y) in $X \times Y$ mit $U \times K \subset f^{-1}(V)$. Also ist f stetig in (x, y) . Da der Punkt beliebig gewählt war, folgt $f \in C^0(X \times Y, Z)$ und nach Definition ist $\text{Ad}(f) = g$. Also ist Ad surjektiv. $\square$

Bemerkung 4.56. Der Name Exponentialgesetz kommt daher, dass $C^0(X, Y)$ von manchen auch als Y^X geschrieben wird. In dieser Schreibweise erhalten wir in Satz 4.55 eine Bijektion zwischen $Z^{X \times Y}$ und $(Z^Y)^X$, was rein visuell ein wenig nach einem Potenzgesetz aussieht.

Mit Hilfe von Satz 4.55 lässt sich nun die Stetigkeit zweier wichtiger Abbildungen zeigen.

Korollar 4.57. Für topologische Räume X und Y sei

$$\text{ev} : C^0(X, Y) \times X \rightarrow Y, \quad \text{ev}(f, x) = f(x),$$

die Auswertungsabbildung oder Evaluation. Ist X lokal kompakt, so ist ev stetig.

Beweis. Dies folgt aus Satz 4.55, denn man überlegt sich leicht, dass

$$\text{Ad}(\text{ev}) = \text{id}_{C^0(X, Y)} : C^0(X, Y) \rightarrow C^0(X, Y),$$

welche offensichtlich stetig ist. $\square$

Korollar 4.58. Seien X, Y und Z topologische Räume. Sind X und Y lokal kompakt, so ist die Abbildung

$$\Phi : C^0(Y, Z) \times C^0(X, Y) \rightarrow C^0(X, Z), \quad \Phi(f, g) = f \circ g,$$

stetig.

Beweis. Nach Satz 4.55 reicht es zu zeigen, dass die Abbildung

$$\Psi : C^0(Y, Z) \times C^0(X, Y) \times X \rightarrow Z, \quad \Psi(f, g, x) = (f \circ g)(x),$$

stetig ist. Es gilt jedoch

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \text{ev}(f, g(x)) = \text{ev}(f, \text{ev}(g, x)),$$

also $\Psi = \text{ev} \circ (\text{id}_{C^0(X, Y)} \times \text{ev})$, welche nach Korollar 4.57 als Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig ist. (Hier bezeichne ev zwei unterschiedliche Auswertungsabbildungen.) Folglich ist Φ stetig. $\square$

4.6 Filter und der Satz von Tychonoff

Wir haben in Abschnitt 4.2 gesehen, dass Kompaktheit auf metrischen Räumen zwar durch Konvergenz von Teilfolgen formuliert werden kann, dass dies aber fuer allgemeine topologische Räume nicht funktioniert, da die Topologie dafür gewisse Abzählbarkeitseigenschaften haben muss.

Es gibt jedoch eine Möglichkeit, wie sich Kompaktheit weiterhin durch Konvergenzen ausdrücken lässt, nämlich indem man den Konvergenzbegriff von Folgen auf Mengensysteme verallgemeinert. Dies lässt sich über sogenannte *Netze* und *Filter* formulieren. Mit Netzen werden wir uns noch in einem Exkurs beschäftigen. In diesem Abschnitt wollen wir die Konvergenz von Filtern betrachten und mit ihr den Satz von Tychonoff beweisen, der vor allem in der Funktionalanalysis wichtige Anwendungen hat.

Definition 4.59. Sei X ein topologischer Raum. Ein Mengensystem $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt *Filter* auf X , wenn es die folgenden Eigenschaften hat:

- (i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
- (ii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- (iii) Ist $F \in \mathcal{F}$ und $F' \subset X$ mit $F \subset F'$, so ist $F' \in \mathcal{F}$.
- (iv) Sind $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, so ist $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

Bemerkung 4.60. Jeder Filter $\mathcal{F}$ hat die folgenden Eigenschaften:

- (1) Aus (i) und (iii) folgt, dass $X \in \mathcal{F}$.

(2) Durch Iteration von (iv) erhält man, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und $F_1, \dots, F_m \in \mathcal{F}$ gilt, dass $\bigcap_{i=1}^m F_i \in \mathcal{F}$.

(3) Aus (iii) folgt, dass für $F \in \mathcal{F}$ und beliebiges $A \subset X$ gilt, dass $F \cup A \in \mathcal{F}$.

Der Name Filter wurde gewählt, da die Idee ist, dass ein Filter alle Mengen einer bestimmten „Mindestgröße“ enthält und dass zu kleine Mengen „rausgefiltert“ werden, also nicht im Filter enthalten ist.

Beispiel 4.61. (1) Ist $x \in X$, so ist $\mathcal{U}(x) := \{U \subset X \mid U \text{ ist Umgebung von } x\}$ ein Filter auf X und heißt *der Umgebungsfilter von x* .

(2) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , so ist

$$\mathcal{F}((x_n)_n) = \{U \subset X \mid U \text{ enthält fast alle Folgenglieder von } (x_n)_n\}$$

ein Filter auf X .

Definition 4.62. Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $x \in X$. $\mathcal{F}$ *konvergiert gegen x* , wenn $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$.

Bemerkung 4.63. Wie man an der Definition leicht sieht, konvergiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X genau dann gegen $x \in X$, wenn $\mathcal{F}((x_n)_n)$ gegen x konvergiert.

Definition 4.64. Sei X ein topologischer Raum. Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt eine *Filterbasis*, wenn gilt:

(i) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(ii) $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

(iii) Sind $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, so gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset B_1 \cap B_2$.

Ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X , so ist

$$\langle \mathcal{B} \rangle := \{F \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \subset F\}$$

ein Filter auf X und heißt *der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter*.

Beispiel 4.65. (1) Ist X metrischer Raum und $x \in X$, so ist $\mathcal{U}(x) = \langle \{B_{1/n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \rangle$. Auf ähnlich findet man Basen von Umgebungsfiltern für beliebige erstabzählbare Räume.

(2) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge im topologischen Raum X und setze $B_k := \{x_n \mid n \geq k\}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathcal{F}((x_n)_n) = \langle \{B_k \mid k \in \mathbb{N}\} \rangle$.

Definition 4.66. Sei X ein topologischer Raum. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt *Ultrafilter*, wenn es keinen echt größeren Filter gibt, d.h. wenn für jeden Filter $\mathcal{F}'$ auf X mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ gilt, dass $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

Satz 4.67. Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X und $A \subset X$. Dann ist entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Beweis. Wenn A und $X \setminus A$ beide in $\mathcal{F}$ lägen, so würde dies wegen $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ mit Eigenschaften (ii) und (iv) eines Filters einen Widerspruch herbeiführen, also kann höchstens eine der beiden Mengen in $\mathcal{F}$ liegen.

Wenn es ein $F \in \mathcal{F}$ gibt mit $A \cap F = \emptyset$, dann ist $F \subset X \setminus A$, also ist nach Eigenschaft (iii) eines Filters $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Ist andererseits $F \cap A \neq \emptyset$ für jedes $F \in \mathcal{F}$, so folgt aus Filtereigenschaft (iv) leicht, dass $\{A \cap F \mid F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis ist. Dann ist

$$\mathcal{F}' := \langle \{A \cap F \mid F \in \mathcal{F}\} \rangle$$

ein Filter, für den nach Filtereigenschaft (iii) gilt, dass $A \in \mathcal{F}'$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, also folgt $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ und damit $A \in \mathcal{F}$, da $\mathcal{F}$ Ultrafilter ist. $\square$

Im Beweis des folgenden Resultats werden wir das Lemma von Zorn benutzen. Dieses ist ein Resultat aus der Mengenlehre, von dem sich zeigen lässt, dass es äquivalent zum umstrittenen Auswahlaxiom ist, welches wir jedoch als gültig annehmen. Das Lemma von Zorn wird mit mengentheoretischem Kontext im Anhang von Jänich, Topologie, verständlich beschrieben. Es sei ebenfalls auf die schönen Erklärungsvideos von Edmund Weitz verwiesen, die in der YouTube-Playlist mit vorlesungsbegleitenden Videos angegeben sind.

Satz 4.68. Jeder Filter liegt in einem Ultrafilter.

Beweis. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X . Sei

$$\mathcal{A} := \{\mathcal{G} \subset \mathfrak{P}(X) \mid \mathcal{G} \text{ ist ein Filter auf } X \text{ mit } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}\} \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X)).$$

Dann ist $(\mathcal{A}, \subset)$ eine partiell geordnete Menge. Da für jede total geordnete Teilmenge $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ die Menge $\bigcup_{\mathcal{G} \in \mathcal{C}} \mathcal{G}$ eine obere Schranke darstellt, hat $\mathcal{A}$ nach dem Lemma von Zorn ein maximales Element $\tilde{\mathcal{F}}$. Ist nun $\mathcal{G}$ ein Filter auf X mit $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{G}$, so ist insbesondere $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, also $\mathcal{G} \in \mathcal{A}$. Da aber $\tilde{\mathcal{F}}$ maximales Element für $\mathcal{A}$ ist, folgt $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{G}$, also ist $\tilde{\mathcal{F}}$ ein Ultrafilter mit $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$. $\square$

Satz 4.69. Ein topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn jeder Ultrafilter auf X konvergiert.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Sei X kompakt. Angenommen, es gebe einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X , der nicht konvergiert, also $\mathcal{U}(x) \not\subset \mathcal{F}$ für jedes $x \in X$. Es gibt also zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U_x mit $U_x \notin \mathcal{F}$. Dann ist $(U_x)_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von X und da X kompakt ist, gibt es $\{x_1, \dots, x_m\}$ mit $X = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$. Nach Satz 4.67 ist $X \setminus U_{x_i} \in \mathcal{F}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Also ist nach Bemerkung 4.60.(2) auch $\bigcap_{i=1}^m (X \setminus U_{x_i}) \in \mathcal{F}$, es gilt jedoch

$$\bigcap_{i=1}^m (X \setminus U_{x_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^m U_{x_i} = \emptyset,$$

was im Widerspruch zu Filtereigenschaft (ii) steht. Also konvergiert jeder Ultrafilter auf X .

„ $\Leftarrow$ “: Nehme an, dass jeder Ultrafilter auf X konvergiert. Angenommen, $(U_i)_{i \in I}$ wäre eine offene Überdeckung von X , die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dann rechnet man leicht nach, dass

$$\mathcal{B} := \left\{ X \setminus \bigcup_{i \in E} U_i \mid E \subset I \text{ endlich} \right\}$$

eine Filterbasis ist. Sei dann $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X , der den Filter $\langle \mathcal{B} \rangle$ enthält. (Ein solcher existiert nach Satz 4.68.) Nehme an, dass $\mathcal{F}$ gegen $x \in X$ konvergiere. Ist dann $i_0 \in I$ so gewählt, dass $x \in U_{i_0}$, so ist $U_{i_0} \in \mathcal{F}$. Nach Konstruktion ist jedoch auch $X \setminus U_{i_0} \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, was im Widerspruch zu Satz 4.67 steht. Also ist X kompakt. $\square$

Wir werden nun mit Hilfe von Filtern den folgenden Satz beweisen, welcher das entscheidende Hilfsmittel zum Beweis des Satzes von Tychonoff liefern wird.

Satz 4.70 (Alexanderscher Subbasissatz). *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$. Dann gilt: X ist genau dann kompakt, wenn jede Überdeckung von X mit Mengen aus $\mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

Beweis. „ $\Rightarrow$ “ ist klar, es ist also nur „ $\Leftarrow$ “ zu zeigen. Angenommen, es gebe einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X , welcher nicht konvergiert. Mit den Filtereigenschaften folgt dann, dass es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U_x , so dass $U_x \notin \mathcal{F}$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass jedes U_x aus der durch $\mathcal{S}$ definierten Basis stammt. Dann gibt es $S_1, \dots, S_m \in \mathcal{S}$ mit $U_x = \bigcap_{i=1}^m S_i$ und da $U_x \notin \mathcal{F}$ ist nach Filtereigenschaft (iv) auch $S_i \notin \mathcal{F}$ für mindestens ein $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Folglich gibt es zu jedem x ein $S_x \in \mathcal{S}$ mit $U_x \subset S_x$ und $S_x \notin \mathcal{F}$. $(S_x)_{x \in X}$ ist eine Überdeckung von X mit Mengen aus $\mathcal{S}$, die nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dies führt man nun genau wie im Beweis von Satz 4.69 zu einem Widerspruch. Also konvergiert jeder Ultrafilter auf X , so dass X nach Satz 4.69 kompakt ist. $\square$

Wir kommen nun zum bereits angekündigten Satz von Tychonoff. Das Besondere an diesem Satz ist, dass sein Ergebnis vollkommen unintuitiv ist, da wir Kompaktheit bisher als eine Art Verallgemeinerung von Endlichkeit betrachtet haben.

Satz 4.71 (Satz von Tychonoff). *Ist I eine beliebige Indexmenge und ist $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter Räume, so ist $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt.*

Beweis. Sei $X := \prod_{i \in I} X_i$. Nach Definition der Produkttopologie auf X wird diese von der Subbasis

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \{ \text{pr}_i^{-1}(U) \mid U_i \subset X_i \text{ offen} \}.$$

erzeugt. Nach Satz 4.70 reicht es zu zeigen, dass jede Überdeckung von X durch Mengen aus $\mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung hat. Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ eine solche Überdeckung von X und sei

$$\mathcal{U}_i := \{ U \subset X_i \mid \text{pr}_i^{-1}(U) \in \mathcal{U} \} \quad \forall i \in I.$$

Da $\mathcal{U}$ Überdeckung von X ist, ist nach Definition

$$\bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{U_i \in \mathcal{U}_i} \text{pr}_i^{-1}(U_i) \right) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X. \quad (4.1)$$

Behauptung: Es gibt ein $i \in I$, so dass $\mathcal{U}_i$ eine Überdeckung von X ist.

Beweis der Behauptung: Angenommen, es gäbe für jedes $i \in I$ ein $x_i \in X_i$, welches nicht in $\bigcup_{U \in \mathcal{U}_i} U$ läge. Dann würde für $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ und für jedes $i \in I$ gelten, dass $\text{pr}_i(x) \notin \bigcup_{U \in \mathcal{U}_i} U$ und damit

$$x \notin \bigcup_{i \in I} \text{pr}_i^{-1} \left(\bigcup_{U_i \in \mathcal{U}_i} U_i \right) = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{U_i \in \mathcal{U}_i} \text{pr}_i^{-1}(U_i) \right),$$

was im Widerspruch zu (4.1) stünde. Also kann es kein solches x geben. ■

Sei $i \in I$ so gewählt, dass $\mathcal{U}_i$ offene Überdeckung von X_i ist. Dann ist $(\text{pr}_i^{-1}(U_i))_{U_i \in \mathcal{U}_i}$ eine Überdeckung von X , genauer eine Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$. Da X_i kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{V}_i$ von $\mathcal{U}_i$. Folglich ist $(\text{pr}_i^{-1}(V))_{V \in \mathcal{V}_i}$ eine endliche Teilüberdeckung von $(\text{pr}_i^{-1}(U_i))_{U_i \in \mathcal{U}_i}$ und damit von $\mathcal{U}$ auf X , woraus die Kompaktheit von X folgt. □

Mit Hilfe des Satzes von Tychonoff lässt sich eine weitere Kompaktifizierung von X definieren, welche wichtige Anwendungen in der Funktionalanalysis hat. Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{C} := C^0(X, [0, 1])$. Betrachte die Abbildung

$$\Phi : X \rightarrow \prod_{f \in \mathcal{C}} [0, 1], \quad \Phi(x) = (f(x))_{f \in \mathcal{C}},$$

und setze

$$\beta X := \overline{\Phi(X)} \subset \prod_{f \in \mathcal{C}} [0, 1].$$

Nach dem Satz von Tychonoff und Satz 4.6 ist βX kompakt. βX heißt die *Stone-Čech-Kompaktifizierung* von X . Nach Definition ist dann $\beta : X \rightarrow \beta X$, $\beta(x) = \Phi(x)$, eine Einbettung.

4.7 Parakompaktheit

Wir beenden dieses Kapitel mit dem Begriff der Parakompaktheit, dessen Nutzen nicht ganz offensichtlich ist. Ein wesentlicher Grund für die Betrachtung dieses Begriffs ist, dass Parakompaktheit eine Mindestanforderung an einen Raum ist, um die Existenz sogenannter *Teilungen der Eins* zu garantieren. Diese werden in der Analysis und der Differentialgeometrie gerne auf Mannigfaltigkeiten genutzt, um aus lokalen Rechnungen,

etwa in lokalen Koordinatenumgebungen, globale Aussagen zu machen. Die Grundidee ist, dass man eine beliebige Funktion auf der Mannigfaltigkeit (und später allgemeinere Abbildungen) als Summe von Funktionen ausdrücken möchte, die außerhalb einer hinreichend kleinen Menge verschwinden. Konkretere Beschreibungen und Anwendungen sind in der Differentialgeometrie und der globalen Analysis zu finden.

Definition 4.72. Sei X ein topologischer Raum.

- (1) Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von X heißt *lokal endlich*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die nur endlich viele der U_i schneidet.
- (2) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X . Eine Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$ von X heißt *Verfeinerung von $(U_i)_{i \in I}$* , wenn es für jedes $j \in J$ ein $i \in I$ gibt, so dass $V_j \subset U_i$.
- (3) X heißt *parakompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine lokal endliche offene Verfeinerung besitzt.

Das folgende Kriterium liefert uns die Parakompaktheit einer wichtigen Klasse von Beispielen.

Satz 4.73. Jeder zweitabzählbare lokal kompakte Hausdorff-Raum ist parakompakt.

Beweis. Nach Aufgabe 1 von Übungsblatt 7 besitzt die Topologie von X eine Basis $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass $\bar{B}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ kompakt ist. Ist nun $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige offene Überdeckung, so gibt es für jedes $i \in I$ und $x \in U_i$ ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit $B_{n(x)} \subset U_i$. Also ist $\bigcup_{i \in I} \{B_{n(x)} \mid x \in U_i\}$ eine Verfeinerung von $(U_i)_{i \in I}$, so dass wir o.B.d.A. annehmen können, dass die Überdeckung aus abzählbar vielen Mengen besteht. Schreibe diese als $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Setzen wir $V_n := \bigcup_{i=1}^n U_i$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist $\bar{V}_n$ kompakt und $V_n \subset V_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\bar{V}_n \subset V_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da wir dies durch Wahl einer passenden streng monotonen Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und Übergang von $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu $(V_{\alpha(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ erreichen können.

Um eine lokal endliche Verfeinerung von $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu finden, reicht es nun, eine lokal endliche Verfeinerung von $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu finden, da die Schnitte einer solchen Verfeinerung mit den U_n wieder eine lokal endliche Verfeinerung liefern.

Setze $A_n := \bar{V}_n \setminus V_{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, wobei $U_0 := \emptyset$. Jedes A_n ist abgeschlossen und da $A_n \subset \bar{V}_n$ und X Hausdorff-Raum ist, ist nach Satz 4.6 jedes A_n kompakt. Weiterhin ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung von X .

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei nun $W_n := \bar{A}_{n+2} \setminus A_{n-1}$, wobei $A_0 := \emptyset$. Jedes W_n ist offen und nach Voraussetzung ist $A_n \subset W_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Da die A_n kompakt sind, können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge $E_n \subset \mathbb{N}$ finden, so dass $A_n \subset \bigcup_{k \in E_n} B_k \subset W_n$. Wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein solches E_n , so ist

$$\mathcal{U} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{B_k \mid k \in E_n\}$$

eine offene Überdeckung von X und eine Verfeinerung von $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Da nach Konstruktion gilt, dass $W_n \cap W_m \neq \emptyset$ nur dann gelten kann, wenn $|n - m| \leq 2$, folgt nach Konstruktion von $\mathcal{U}$, dass $\mathcal{U}$ lokal endlich ist. $\square$

Korollar 4.74. a) $\mathbb{R}^n$ ist parakompakt für jedes $n \in \mathbb{N}$.

b) Jede Mannigfaltigkeit ist parakompakt (falls der Begriff bereits bekannt ist).

Bemerkung 4.75. Allgemeiner ist jeder metrische Raum parakompakt. Der Beweis dafür ist allerdings sehr schwierig und wird zum Beispiel im Buch von Munkres, Topology, Abschnitt §41, gegeben.

Satz 4.76. Jeder parakompakte Hausdorff-Raum ist normal.

Beweis. Sei X ein parakompakter Hausdorff-Raum und seien $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$.

Behauptung: Für jedes $q \in B$ gibt es $U_q, V_q \subset X$ offen mit $A \subset U_q$, $q \in V_q$ und $U_q \cap V_q = \emptyset$.

Beweis der Behauptung: Sei $q \in B$ fest gewählt. Da X Hausdorff-Raum ist, gibt es für jedes $p \in A$ eine offene Umgebungen $U_{p,q}$ von p mit $q \notin \bar{U}_{p,q}$. Dann ist $(U_{p,q})_{p \in A}$ eine offene Überdeckung von A . Nehmen wir $X \setminus A$ dazu, so erhalten wir eine offene Überdeckung von X , die nach Annahme eine lokal endliche Verfeinerung $(V_{q,i})_{i \in I}$ besitzt. Sei $\mathcal{V}_q := \{V_{q,i} \mid \exists p \in A \text{ mit } V_{q,i} \subset U_{p,q}\}$. Dann ist $\mathcal{V}_q$ nach Konstruktion eine lokal endliche offene Überdeckung von A und es gilt $q \notin \bar{V}$ für alle $V \in \mathcal{V}_q$. Setzen wir nun $U_q := \bigcup_{V \in \mathcal{V}_q} V$, so ist $A \subset U_q$. Mit Aufgabe 4 von Übungsblatt 7 folgt $\bar{U}_q = \bigcup_{V \in \mathcal{V}_q} \bar{V}$, also ist $q \notin \bar{U}_q$. Folglich gibt es eine Umgebung V_q von q mit $U_q \cap V_q = \emptyset$. $\blacksquare$

Wähle nun für jedes $q \in B$ offene Mengen U_q und V_q wie in der Behauptung. Die Familie $(V_q)_{q \in B}$ ist dann eine offene Überdeckung von B und mit dem gleichen Argument wie im Beweis der Behauptung bekommen wir durch Wahl einer lokal endlichen Verfeinerung $\mathcal{W}$ von $(V_q)_{q \in B}$ mit $A \cap \bar{W} = \emptyset$ für alle $W \in \mathcal{W}$ eine offene Teilmenge $V \subset X$ mit $B \subset V$ und so dass $A \cap \bar{V} = \emptyset$. Also können wir ein offenes U finden mit $A \subset U$ und $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Definition 4.77. Sei X ein topologischer Raum.

- (1) Für $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist der Träger von f gegeben durch $\text{supp } f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$.
- (2) Eine Familie stetiger Funktionen $(\rho_i : X \rightarrow [0, 1])_{i \in I}$ heißt *Teilung der Eins* (auch *Zerlegung der Eins* oder *Partition der Eins*), wenn sie folgende Eigenschaften hat:
 - (i) $(\text{supp } \rho_i)_{i \in I}$ ist eine lokal endliche Überdeckung von X .
 - (ii) $\sum_{i \in I} \rho_i(x) = 1 \quad \forall x \in X$.

- (3) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Eine Teilung der Eins $(\rho_i)_{i \in I}$ auf X heißt $(U_i)_{i \in I}$ *subordiniert*, wenn $\text{supp } \rho_i \subset U_i$ für jedes $i \in I$. (Beachte, dass die Indexmenge von Überdeckung und Teilung der Eins hier dieselbe ist.)

Bemerkung 4.78. Man beachte, dass Eigenschaft (i) einer Teilung der Eins unter anderem besagt, dass für jedes $x \in X$ die Menge $\{i \in I \mid \rho_i(x) \neq 0\}$ endlich ist, so dass die Summe in Eigenschaft (ii) wohldefiniert ist.

Lemma 4.79. Sei X parakompakter Hausdorff-Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X . Dann gibt es eine lokal endliche Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von X mit $\bar{V}_i \subset U_i$ für jedes $i \in I$.

Beweis. Nach Satz 4.76 und Satz 3.34 gibt es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung V_x mit $\bar{V}_x \subset U_i$ für ein $i \in I$. Dann ist $(V_x)_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von X , besitzt also eine lokal endliche Verfeinerung $(W_j)_{j \in J}$. Nach Konstruktion gibt es $\alpha : J \rightarrow I$, so dass $\bar{W}_j \subset U_{\alpha(j)}$ für alle $j \in J$ erfüllt sein muss. Sei nun $\alpha : J \rightarrow I$ eine Abbildung, so dass $\bar{W}_j \subset U_{\alpha(j)}$ für jedes $j \in J$ gilt. Setzen wir dann

$$V_i := \bigcup_{j \in \alpha^{-1}(\{i\})} W_j \quad \forall i \in I,$$

so ist $(V_i)_{i \in I}$ nach Konstruktion eine offene Überdeckung von X . Da $(W_j)_{j \in J}$ lokal endlich ist, ist auch $(V_i)_{i \in I}$ lokal endlich und nach Aufgabe 4 von Übungsblatt 7 gilt, dass $\bar{V}_i \subset U_i$ für alle $i \in I$. $\square$

Satz 4.80. Auf einem parakompakten Hausdorff-Raum besitzt jede offene Überdeckung von X eine subordinierte Teilung der Eins.

Beweis. Sei X ein parakompakter Hausdorff-Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Durch zweifache Anwendung von Lemma 4.79 erhalten wir lokal endliche Überdeckungen $(V_i)_{i \in I}$ und $(W_i)_{i \in I}$ mit $\bar{W}_i \subset V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$ für alle $i \in I$. Nach Satz 4.76 und dem Lemma von Urysohn, genauer Korollar 3.38, gibt es für jedes $i \in I$ ein stetiges $f_i : X \rightarrow [0, 1]$, so dass $f_i(x) = 1$ falls $x \in \bar{W}_i$ und $f_i(x) = 0$ falls $x \in X \setminus V_i$. Da $\text{supp } f_i \subset V_i$ für alle $i \in I$, ist $(\text{supp } f_i)_{i \in I}$ eine lokal endliche Überdeckung. Da $(W_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X ist, ist außerdem

$$f(x) := \sum_{i \in I} f_i(x) \neq 0 \quad \forall x \in X.$$

Definieren wir nun $(\rho_i : X \rightarrow [0, 1])_{i \in I}$ durch $\rho_i(x) := \frac{f_i(x)}{f(x)}$ für jedes $x \in X$, so folgt, dass $(\rho_i)_{i \in I}$ eine der Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ subordinierte Teilung der Eins ist. $\square$

Kapitel 5

Transformationsgruppen

In diesem Kapitel werden wir das Zusammenspiel zwischen Gruppen und topologischen Räumen beleuchten. Gruppen sind hierbei das geeignete Mittel, um Symmetrien auf topologischen Räumen auszudrücken und ihre Eigenschaften zu formulieren. Zunächst müssen wir die Welt der Gruppen mit der Welt der Topologie verbinden, was wir in Abschnitt 5.1 tun werden. Topologische Gruppen sind mit Topologien versehen Gruppen, deren Gruppenstruktur mit der Topologie „verträglich“ ist, wie wir im nächsten Abschnitt präzisieren werden.

Mit diesem Begriff lassen sich viele intuitive Vorstellungen von Symmetrien auf allgemeinen topologischen Räumen sehr elegant formalisieren, was zu einem sehr reichhaltigen Teilgebiet der Topologie, der sogenannten *äquivarianten Topologie*, führt, in welche wir in diesem Kapitel einen ersten Einblick geben wollen.

Topologische Gruppen werden wir in dem Sinne als Transformationsgruppen betrachten, dass ihre Gruppenstruktur benutzt werden kann, um topologische Räume symmetrieehaltend zu transformieren, wie wir im Folgenden im Detail sehen werden.

In diesem Kapitel werden wir folgende Grundbegriffe der Gruppentheorie benutzen: Normalteiler (normale Untergruppen), direktes Produkt von Gruppen, Linksnebenklassen.)

5.1 Topologische Gruppen

Wir wollen uns im Folgenden topologische Räume ansehen, die eine Gruppenstruktur besitzen, welche mit der Topologie verträglich ist. Dies präzisieren wir in der folgenden Definition.

Definition 5.1. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G , die mit einer Topologie versehen ist, so dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} m : G \times G &\rightarrow G, & (g, h) &\mapsto g \cdot h, \\ i : G &\rightarrow G, & g &\mapsto g^{-1}, \end{aligned}$$

stetig sind.

Beispiel 5.2. (1) Jede Gruppe G ist mit der diskreten Topologie eine topologische Gruppe. G wird dann auch *diskrete Gruppe* genannt.

(2) $(\mathbb{R}^n, +)$ ist mit der euklidischen Topologie eine topologische Gruppe, wir wissen aus der Analysis, dass die Abbildungen $m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m(v, w) = v + w$, und $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i(v) = -v$, stetig sind.

(3) $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind mit der jeweiligen Multiplikation topologische Gruppen.

(4) Ist G topologische Gruppe und H eine Untergruppe von G , so ist H mit der Unterraumtopologie eine topologische Gruppe.

(5) Sind G_1 und G_2 topologische Gruppen, so ist das direkte Produkt $G_1 \times G_2$ eine topologische Gruppe mit der Produkttopologie.

(6) Für $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ betrachte die aus der linearen Algebra bekannte Gruppe

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}.$$

Betrachten wir $GL(n, \mathbb{K})$ als Unterraum von $\mathbb{K}^{n \times n}$ mit der euklidischen Topologie, so ist $GL(n, \mathbb{K})$ mit der Matrixmultiplikation eine topologische Gruppe: Dies sieht man daran, dass für $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$ die Einträge von AB Polynome in den Einträgen von A und B sind und dass die Einträge von A^{-1} rationale Funktionen in den Einträgen von A sind, welche offensichtlich stetig sind.

(7) Wegen (4) und (6) sind auch die Matrixgruppen $SL(n, \mathbb{K})$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, und alle weiteren Untergruppen von $GL(n, \mathbb{K})$ topologische Gruppen.

Für einen topologischen Raum X sei

$$\text{Aut}(X) := \text{Homöo}(X) := \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist Homöomorphismus}\}.$$

Betrachten wir die Verknüpfung von Abbildungen als Operation

$$\circ : \text{Aut}(X) \times \text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(X),$$

so ist $\text{Aut}(X)$ mit der Verknüpfung von Abbildungen ist eine Gruppe mit neutralem Element id_X , wobei das Inverse von $f \in \text{Aut}(X)$ durch die Umkehrabbildung f^{-1} gegeben ist.

Satz 5.3. Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Ist $\text{Aut}(X)$ mit der KO-Topologie versehen, so ist $\text{Aut}(X)$ eine topologische Gruppe.

Beweis. Die Stetigkeit von $m : \text{Aut}(X) \times \text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(X)$, $m(f, g) = f \circ g$, erhalten wir als Spezialfall von Korollar 4.58, da X nach Korollar 4.39 lokal kompakt ist.

Es bleibt zu zeigen, dass die Inversion i stetig ist, wobei es wie oben reicht zu zeigen, dass $i^{-1}(M'(K, U))$ für jedes kompakte $K \subset X$ und jedes offene $U \subset X$ offen in $\text{Aut}(X)$

ist, wobei $M'(K, U) := M(K, U) \cap \text{Aut}(X)$. Für jedes $f \in \text{Aut}(X)$ gilt wegen seiner Bijektivität:

$$f \in i^{-1}(M'(K, U)) \Leftrightarrow f^{-1}(K) \subset U \Leftrightarrow f^{-1}(X \setminus K) \supset X \setminus U \Leftrightarrow f(X \setminus U) \subset X \setminus K.$$

Da X kompakt ist, ist $X \setminus U$ kompakt. Da X Hausdorff-Raum ist, ist $X \setminus K$ offen. Also haben wir gezeigt, dass $i^{-1}(M'(K, U)) = M'(X \setminus U, X \setminus K)$ offen ist, woraus die Stetigkeit von i folgt. $\square$

Satz 5.4. Sei G eine topologische Gruppe und sei $g \in G$. Dann sind die Abbildungen

$$\ell_g : G \rightarrow G, \quad \ell_g(h) = gh, \quad r_g : G \rightarrow G, \quad r_g(h) = hg,$$

Homöomorphismen und es gilt:

$$\ell_{g_1 g_2} = \ell_{g_1} \circ \ell_{g_2}, \quad r_{g_1 g_2} = r_{g_2} \circ r_{g_1} \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Beweis. Die Stetigkeit der Abbildungen folgt unmittelbar daraus, dass $\ell_g = m|_{\{g\} \times G}$ und $r_g = m|_{G \times \{g\}}$, wobei m wieder die Gruppenoperation bezeichne. Weiter gilt für alle $g_1, g_2, h \in G$, dass

$$\begin{aligned} \ell_{g_1 g_2}(h) &= (g_1 g_2)h = g_1(g_2 h) = \ell_{g_1}(g_2 h) = (\ell_{g_1} \circ \ell_{g_2})(h), \\ r_{g_1 g_2}(h) &= h(g_1 g_2) = (h g_1)g_2 = r_{g_2}(h g_1) = (r_{g_2} \circ r_{g_1})(h). \end{aligned}$$

Nach diesen Gleichungen gilt insbesondere für jedes $g \in G$, dass

$$\ell_{g^{-1}} \circ \ell_g = \ell_g \circ \ell_{g^{-1}} = \ell_e = \text{id}_G, \quad r_{g^{-1}} \circ r_g = r_g \circ r_{g^{-1}} = r_e = \text{id}_G,$$

wobei e das neutrale Element bezeichne. Damit folgt, dass $\ell_g^{-1} = \ell_{g^{-1}}$ und $r_g^{-1} = r_{g^{-1}}$, womit folgt, dass ℓ_g und r_g Homöomorphismen sind. $\square$

Bemerkung 5.5. Etwas vornehmer kann man die Bedingung $\ell_{g_1 g_2} = \ell_{g_1} \circ \ell_{g_2}$ auch wie folgt ausdrücken: Die Abbildung

$$L : G \rightarrow \text{Aut}(G), \quad L(g) = \ell_g,$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Die Tatsache, dass die Abbildungen ℓ_g und r_g in Satz 5.4 Homöomorphismen sind, lassen sich so interpretieren, dass G als topologischer Raum intuitiv an allen Punkten „gleich aussieht“, also symmetrisch ist. In den nächsten Sätzen werden wir weiter auf diese Beobachtung eingehen indem wir zeigen, dass sich eine topologische Gruppe vollständig durch ihre Struktur in der Nähe eines festen Punktes verstehen lässt.

Im Folgenden verwenden wir folgende Schreibweisen, die bereits bekannt sein sollten: für eine Gruppe G , $g \in G$ und $A, B \subset G$ schreiben wir

$$gA := \{ga \in G \mid a \in A\}, \quad AB = \{ab \in G \mid a \in A, b \in B\}.$$

Satz 5.6. Sei G eine topologische Gruppe mit der Topologie $\mathcal{T}$ und neutralem Element e . Dann gilt:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{gU \subset G \mid g \in G, U \text{ ist offene Umgebung von } e\}.$$

Beweis. Sei die rechte Seite der zu zeigenden Gleichung mit $\mathcal{N}$ bezeichnet. Ist $gU \in \mathcal{N}$, so ist $gU = \ell_g(U) = \ell_{g^{-1}}^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, da U offen und $\ell_{g^{-1}}$ stetig ist, also ist $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$. Ist andererseits $V \in \mathcal{T}$ mit $V \neq \emptyset$, so gilt für jedes $g \in V$, dass $\ell_{g^{-1}}(V) = \ell_g^{-1}(V)$ offen und wegen $\ell_{g^{-1}}(g) = e$ eine Umgebung von e ist. Also ist $V = gU$ mit $U := \ell_g^{-1}(V)$, so dass $V \in \mathcal{N}$ und damit $\mathcal{T} \subset \mathcal{N}$. $\square$

Satz 5.7. Sei G eine topologische Gruppe und $e \in G$ ihr neutrales Element. Dann ist G genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn $\{e\}$ abgeschlossen in G ist.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Klar.

„ $\Leftarrow$ “: Betrachte die Abbildung $\varphi : G \times G \rightarrow G$, $\varphi(g, h) = gh^{-1} = m(g, i(h))$. Als Verknüpfung stetiger Abbildungen ist φ stetig. Also ist die folgende Menge abgeschlossen:

$$\varphi^{-1}(\{e\}) = \{(g, g) \in G \times G \mid g \in G\} = \Delta_G.$$

Nach Satz 3.33 ist G daher ein Hausdorff-Raum. $\square$

Definition 5.8. Eine Untergruppe H einer topologischen Gruppe G heißt *abgeschlossen* (offen, zusammenhängend, kompakt, ...), wenn sie eine abgeschlossene (offene, zusammenhängende, kompakte, ...) Teilmenge von G ist.

Satz 5.9. Sei G eine topologische Gruppe, $e \in G$ ihr neutrales Element und sei $C \subset G$ die Zusammenhangskomponente, die e enthält. Dann gilt:

- a) C ist ein abgeschlossener Normalteiler von G .
- b) Für jedes $g \in G$ ist gC die Zusammenhangskomponente, die g enthält.

Beweis. a) Nach Satz 3.13.d) ist C als Komponente abgeschlossen.

Nach Satz 3.6 ist $i(C)$ zusammenhängend. Da $i(e) = e$, ist $e \in i(C)$, also ist $i(C) \subset C$ nach Satz 3.13.c). Folglich gilt für jedes $g \in C$, dass $g^{-1} \in C$. Völlig analog folgt $m(C \times C) \subset C$, also gilt für alle $g, h \in C$, dass $gh \in C$. Also ist C eine abgeschlossene Untergruppe von G .

Für $g \in G$ sei $\tau_g : G \rightarrow G$, $\tau_g(h) = ghg^{-1} = (\ell_g \circ r_{g^{-1}})(h)$. τ_g ist stetig, also ist $\tau_g(C)$ wieder nach Satz 3.6 zusammenhängend, und wegen $\tau_g(e) = e$ folgt, dass $\tau_g(C) \subset C$, also $gCg^{-1} \subset C$. Da g beliebig, folgt, dass C ein Normalteiler ist.

- b) Sei $g \in G$ fest gewählt und Z die Zusammenhangskomponente von g . Da ℓ_g stetig ist mit $\ell_g(e) = g$, ist $gC = \ell_g(C)$ eine zusammenhängende Umgebung von g , also $gC \subset Z$ nach Satz 3.13.c). Analog ist $\ell_{g^{-1}}(Z)$ eine zusammenhängende Umgebung von e , also $\ell_{g^{-1}}(Z) = \ell_g^{-1}(Z) \subset C$. Durch Kombination der beiden Inklusionen folgt $Z = \ell_g(C) = gC$. $\square$

Satz 5.10. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat $GL(n, \mathbb{R})$ genau zwei Zusammenhangskomponenten:

$$GL_+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A > 0\}, \quad GL_-(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A < 0\}.$$

Beweis. Wir können $GL(n, \mathbb{R})$ schreiben als

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) &= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\} = \det^{-1}((-\infty, 0)) \cup \det^{-1}((0, +\infty)) \\ &= GL_+(n, \mathbb{R}) \cup GL_-(n, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

welches wegen der Stetigkeit der Determinante eine Zerlegung in disjunkte nichtleere offene Teilmengen ist. Wir werden nun durch vollständige Induktion zeigen, dass $GL_+(n, \mathbb{R})$ zusammenhängend ist, für $GL_-(n, \mathbb{R})$ zeigt man es analog.

Für $n = 1$ ist dies klar, da $GL_+(1, \mathbb{R}) = (0, +\infty)$. Nehme nun an, dass $GL_+(n-1, \mathbb{R})$ für ein $n \geq 2$ zusammenhängend ist. Sei $p : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die erste Spalte. Man sieht leicht, dass p stetig und offen ist und sich auf eine Abbildung

$$p_+ : GL_+(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

einschränken lässt, die surjektiv, stetig und offen und damit nach Satz 2.30 eine Identifizierung ist. Nach Aufgabe 2 von Blatt 4 ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zusammenhängend. Sei $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$p_+^{-1}(e_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & v^T \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in GL_+(n-1, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^{n-1} \right\} \approx \mathbb{R}^{n-1} \times GL_+(n-1, \mathbb{R}),$$

welches nach Induktionsvoraussetzung zusammenhängend ist. Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig sei $A \in p_+^{-1}(\{x\})$. Wie man leicht nachrechnet ist $p_+(AB) = Ap_+(B)$ für alle $B \in GL_+(n, \mathbb{R})$ nach Definition der Matrixmultiplikation. Daraus folgert man, dass

$$\ell_A(p_+^{-1}(e_1)) = p_+^{-1}(x)$$

und da ℓ_A ein Homöomorphismus ist, ist $p_+^{-1}(x)$ homöomorph zu $p_+^{-1}(e_1)$ und damit zusammenhängend für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Aus Aufgabe 1 von Blatt 4 folgt damit, dass $GL_+(n, \mathbb{R})$ zusammenhängend ist. $\square$

5.2 Gruppenwirkungen auf topologischen Räumen

Der Begriff der Gruppenwirkung ist die mathematische Formalisierung der Vorstellung von Symmetrie eines Raumes. Wir betrachten zunächst ihre Definition und einige Beispiele, bevor wir allgemeinere Eigenschaften untersuchen.

Definition 5.11. Sei G eine topologische Gruppe, e ihr neutrales Element und sei X ein topologischer Raum. Eine G -Wirkung (oder G -Operation) auf X ist eine stetige Abbildung

$$\rho : G \times X \rightarrow X$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $\rho(e, x) = x$ für alle $x \in X$,
- (ii) $\rho(g, \rho(h, x)) = \rho(gh, x)$ für alle $g, h \in G, x \in X$.

(X, ρ) heißt dann ein *G-Raum*. Wenn klar ist, welche Gruppenwirkung gemeint ist, schreibt man auch $gx := g \cdot x := \rho(g, x)$ für $g \in G$ und $x \in X$.

Beispiel 5.12. (1) Für $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist

$$GL(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad (A, v) \mapsto Av,$$

eine $GL(n, \mathbb{K})$ -Wirkung auf $\mathbb{K}^n$.

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $O(n) \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, $(A, v) \mapsto Av$, eine $O(n)$ -Wirkung auf S^{n-1} .

(3) Für $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, mit $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda v.$$

eine $\mathbb{K}^*$ -Wirkung auf $\mathbb{K}^n$.

(4) Ist G eine topologische Gruppe, so ist

$$\rho : G \times G \rightarrow G, \quad \rho(g, h) = ghg^{-1},$$

eine G -Wirkung auf G , die *Konjugation*.

(5) Ist X ein topologischer Raum und $f \in \text{Aut}(X)$, so dass $f \circ f = \text{id}_X$ (z.B. Spiegelungen), so ist mit $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{e, \tau\}$ als diskreter Gruppe durch

$$\tau \cdot x := f(x),$$

eine $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung auf X gegeben.

(6) Ist X ein kompakter Hausdorff-Raum, so ist

$$\text{ev} : \text{Aut}(X) \times X \rightarrow X, \quad \text{ev}(f, x) = f(x),$$

eine $\text{Aut}(X)$ -Wirkung auf X . (Benutze hierbei Korollar 4.57 und Satz 5.3.)

Satz 5.13. Sei G eine topologische Gruppe und (X, ρ) ein G -Raum. Dann ist für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$\ell_g : X \rightarrow X, \quad \ell_g(x) = \rho(g, x),$$

ein Homöomorphismus. Weiter gilt

$$\ell_{g_1 g_2} = \ell_{g_1} \circ \ell_{g_2} \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Beweis. Dies folgt völlig analog zu Satz 5.4. □

In der folgenden Definition bündeln wir die wichtigsten Begriffe, die bei der Betrachtung von Gruppenwirkungen auftreten.

Definition 5.14. Sei G eine topologische Gruppe, $e \in G$ ihr neutrales Element und X ein G -Raum.

- (1) Für $x \in X$ ist die *Bahn* oder der *Orbit von x* gegeben durch $Gx := \{gx \mid g \in G\}$.
- (2) Die *Standgruppe* oder *Isotropiegruppe von $x \in X$* ist $G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$.
Wie man leicht sieht, ist G_x eine Untergruppe von G .
- (3) $x \in X$ heißt *Fixpunkt* der G -Wirkung, wenn $G_x = G$, wenn also $gx = x$ für alle $g \in G$ gilt. Die Menge aller Fixpunkte der Wirkung wird mit X^G bezeichnet.
- (4) Die G -Wirkung heißt *frei*, wenn $G_x = \{e\}$ für alle $x \in X$ gilt.
- (5) Die G -Wirkung heißt *transitiv*, wenn es für alle $x, y \in X$ ein $g \in G$ gibt, so dass $gx = y$.
- (6) Die G -Wirkung heißt *trivial*, wenn $X^G = X$, wenn also $gx = x$ für alle $g \in G, x \in X$ erfüllt sei.
- (7) Wir erhalten eine Äquivalenzrelation auf X durch

$$x \sim_G y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists g \in G \text{ mit } gx = y.$$

Der Quotientenraum $X/G := X/\sim_G$ mit der Quotiententopologie heißt *Bahnenraum* oder *Orbitraum* der Wirkung.

- Bemerkung 5.15.** (1) Nach Definition erhält man durch Wahl von Repräsentanten eine Bijektion zwischen X/G und $\{Gx \mid x \in X\}$, der Menge der Bahnen der G -Wirkung.
- (2) Ist G eine topologische Gruppe, X ein G -Raum, so ist die Einschränkung der G -Wirkung auf $H \times X$ eine H -Wirkung auf X und heißt die *eingeschränkte Wirkung*.

Beispiel 5.16. (1) Betrachte den Gruppenhomomorphismus

$$i : O(2) \rightarrow O(3), \quad i \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und damit die $O(2)$ -Wirkung auf S^2 , die gegeben ist durch

$$O(2) \times S^2 \rightarrow S^2, \quad (A, v) = i(A)v,$$

wir betrachten also alle Verknüpfungen von Rotationen und Spiegelungen in der ersten beiden Koordinaten. Setze $G := O(2)$. Die Bahnen dieser Wirkung sind gegeben durch

$$G(x, y, z) = \{(x', y', z') \in S^2 \mid z' = z\},$$

so dass die Fixpunkte gegeben sind durch $(S^2)^G = \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$. Insbesondere ist die Wirkung nicht frei. Die Wirkung ist auch nicht transitiv, da es zum Beispiel kein $A \in G$ gibt mit $A(0,0,1) = (0,0,-1)$.

Ist $(x,y,z) \in G \setminus \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$, so ist die Standgruppe von (x,y,z) gegeben durch

$$G_{(x,y,z)} = \{1, \tau\},$$

wobei $\tau \in G$ die Spiegelung von $\mathbb{R}^2$ entlang der Geraden $\mathbb{R}(x,y)$ bezeichne. Insbesondere gibt es für jedes $(x,y,z) \in G \setminus \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$ also einen Gruppenisomorphismus $G_{(x,y,z)} \cong \mathbb{Z}_2$.

- (2) Sei $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und betrachte die $\mathbb{K}^*$ -Wirkung auf $\mathbb{K}^{n+1}$ aus Beispiel 5.12.(3). Ihre Standgruppen sind offenbar gegeben durch

$$\mathbb{K}_v^* = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } v \neq 0, \\ \mathbb{K}^* & \text{falls } v = 0. \end{cases}$$

Die Wirkung lässt sich zu einer freien $\mathbb{K}^*$ -Wirkung auf $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ einschränken. Nach Konstruktion ist $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^* \approx \mathbb{R}P^n$ und $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^* \approx \mathbb{C}P^n$.

Aus Aufgabe 1 von Blatt 3 folgt außerdem, dass $\mathbb{R}P^n \approx S^n/\mathbb{Z}_2$ bezüglich der $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung

$$\mathbb{Z}_2 \times S^n \rightarrow S^n, \quad (\tau, x) \mapsto -x,$$

wobei $\tau \in \mathbb{Z}_2$ das nicht-neutrale Element bezeichne.

Satz 5.17. Sei G eine topologische Gruppe und X ein G -Raum. Wenn X Hausdorff-Raum ist, so ist G_x abgeschlossen für jedes $x \in X$.

Beweis. Sei $x \in X$ und sei $\varphi : G \rightarrow X$, $\varphi(g) = gx$. Dann ist φ stetig, da $\varphi = \rho \circ i$, wobei $i : G \rightarrow G \times X$, $i(g) = (g, x)$. Da X Hausdorff-Raum ist, ist $\{x\}$ abgeschlossen, also ist $G_x = \varphi^{-1}(\{x\})$ abgeschlossen. $\square$

Satz 5.18. Sei G eine topologische Gruppe, X ein G -Raum. Dann ist die kanonische Projektion $\pi : X \rightarrow X/G$ offen.

Beweis. Sei $U \subset X$ offen. Nach Definition der Quotiententopologie ist $\pi(U) \subset X/G$ genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(\pi(U))$ offen in X ist. Nach Definition von π ist jedoch $\pi(x) \in \pi(U)$ genau dann, wenn es ein $g \in G$ gibt mit $gx \in U$, also ist

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g^{-1}U = \bigcup_{g \in G} \ell_g^{-1}(U),$$

welches nach Satz 5.4 eine Vereinigung offener Mengen und damit offen ist. Also ist π offen. $\square$

Definition 5.19. Seien X und Y topologische Räume.

- (1) $f : X \rightarrow Y$ heißt *eigentlich*, wenn für jedes kompakte $K \subset Y$ die Menge $f^{-1}(K)$ kompakt ist.
- (2) Sei G eine topologische Gruppe und $\rho : G \times X \rightarrow X$ eine G -Wirkung auf X . ρ heißt *eigentliche G -Wirkung* und X *eigentlicher G -Raum*, wenn die Abbildung

$$G \times X \rightarrow X \times X, \quad (g, x) \mapsto (x, \rho(g, x)),$$

eigentlich und abgeschlossen ist.

Wir interessieren uns für eigentliche G -Wirkungen, weil ihre Bahnen und Standgruppen schöne Eigenschaften haben, wie wir gleich sehen werden. Zuvor noch ein Kriterium, das Eigentlichkeit impliziert und leichter zu überprüfen ist.

Satz 5.20. *Sei G eine topologische Gruppe und X ein G -Raum. Ist G kompakter Hausdorff-Raum und X Hausdorff-Raum, so ist die G -Wirkung eigentlich.*

Beweis. Da G kompakt ist, ist die Projektion $\text{pr} : G \times X \rightarrow X$ eigentlich und nach Aufgabe 1 von Blatt 6 abgeschlossen. Mit der Stetigkeit der Wirkung folgt, dass die Abbildung

$$\Phi : G \times X \rightarrow G \times X, \quad \Phi(g, x) = (g, gx),$$

ein Homöomorphismus ist (mit $\Phi^{-1}(g, x) = (g, g^{-1}x)$). Folglich ist auch

$$m : G \times X \rightarrow X, \quad m(g, x) = gx$$

eigentlich und abgeschlossen, da $m = \text{pr} \circ \Phi$.

Sei $\theta : G \times X \rightarrow X \times X$, $\theta(g, x) = (x, gx)$ und setze $Y := G \times X$. Nach Konstruktion ist

$$\theta = (\text{pr} \times m) \circ \Delta,$$

wobei $\Delta : Y \rightarrow Y \times Y$, $\Delta(y) = (y, y)$. Man sieht leicht, dass $\text{pr} \times m$ eigentlich und abgeschlossen ist, weil pr und m eigentlich und abgeschlossen sind. Es reicht daher zu zeigen, dass Δ eigentlich und abgeschlossen ist. Die Eigentlichkeit ist klar nach Definition.

Δ ist eine Einbettung, also ein Homöomorphismus auf ihr Bild, da $p : Y \times Y \rightarrow Y$, $p(y_1, y_2) = y_1$, stetig ist mit $p \circ \Delta = \text{id}_Y$. Nach Voraussetzung ist Y ein Hausdorff-Raum, also ist $\Delta_Y = \Delta(Y)$ nach Satz 3.33 abgeschlossen in Y . Da Δ eine Einbettung ist, ist für jedes abgeschlossene $A \subset Y$ die Menge $\Delta(A)$ abgeschlossen in $\Delta(Y)$ und damit nach Lemma 3.39 abgeschlossen in $Y \times Y$. Also ist Δ eine abgeschlossene Abbildung, was zu zeigen war. $\square$

Satz 5.21. *Ist G eine topologische Gruppe und X ein eigentlicher G -Raum, so ist X/G ein Hausdorff-Raum.*

Beweis. Sei $\theta : G \times X \rightarrow X \times X$, $\theta(g, x) = (x, gx)$. Da die Wirkung eigentlich ist, ist $\theta(G \times X)$ abgeschlossen. Also ist $(X \times X) \setminus \theta(G \times X)$ offen, so dass nach Satz 5.18 $(\pi \times \pi)((X \times X) \setminus \theta(G \times X))$ offen ist. Wie man jedoch leicht nachrechnet (Übung), ist

$$(\pi \times \pi)((X \times X) \setminus \theta(G \times X)) = (X/G \times X/G) \setminus \Delta_{X/G},$$

also folgt, dass $\Delta_{X/G}$ abgeschlossen und damit nach Satz 3.33 X/G Hausdorff-Raum ist. $\square$

Satz 5.22. Sei G eine topologische Gruppe und X ein eigentlicher G -Raum. Dann gilt für jedes $x_0 \in X$:

- a) Die Abbildung $\varphi_{x_0} : G \rightarrow X$, $\varphi_{x_0}(g) = gx_0$, ist eigentlich und abgeschlossen.
- b) Die Standgruppe $G_{x_0} \subset G$ ist kompakt.
- c) Die Bahn $Gx_0 \subset X$ ist abgeschlossen.

Beweis. a) Sei wieder $\theta : G \times X \rightarrow X \times X$, $\theta(g, x) = (x, gx)$. θ lässt sich einschränken zu $\theta' : G \times \{x_0\} \rightarrow \{x_0\} \times X$. Man rechnet leicht nach, dass θ' eigentlich und abgeschlossen ist, da θ eigentlich und abgeschlossen ist. Dann ist

$$\varphi_{x_0} = \text{pr}_2 \circ \theta' \circ i,$$

wobei $\text{pr}_2 : \{x_0\} \times X \rightarrow X$ die Projektion sei und $i : G \rightarrow G \times \{x_0\}$, $i(g) = (g, x_0)$. Wie man leicht sieht, sind pr_2 und i eigentlich und abgeschlossen, so dass φ_{x_0} als Verknüpfung wieder eigentlich und abgeschlossen ist.

- b) Dies folgt aus a), da $G_x = \varphi_x^{-1}(\{x\})$.
- c) Dies folgt aus a), da $Gx = \varphi_x(G)$.

$\square$

Zum Schluss des Abschnitts wollen wir kurz äquivariante Abbildungen behandeln. Dieser Begriff verallgemeinert die Vorstellung, dass eine Abbildung symmetrienerhaltend ist bzw. die Symmetrie eines Raumes in eine andere Symmetrie überführt.

Definition 5.23. Sei G eine topologische Gruppe und seien X und Y zwei G -Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *G-äquivariant* (oder *G-Abbildung*), wenn

$$f(gx) = gf(x) \quad \forall g \in G, x \in X.$$

Die Menge der stetigen äquivarianten Abbildungen $X \rightarrow Y$ wird mit $C_G^0(X, Y)$ bezeichnet.

Ist Y mit der trivialen G -Wirkung versehen, so nennen wir eine G -äquivariante Abbildung *G-invariant*, wenn also $f(gx) = f(x)$ für alle $g \in G$ und $x \in X$.

Satz 5.24. Sei G eine topologische Gruppe, seien X und Y zwei G -Räume und seien $\pi_X : X \rightarrow X/G$ und $\pi_Y : Y \rightarrow Y/G$ die kanonischen Projektionen. Ist $\varphi : X \rightarrow Y$ stetig und G -äquivariant, so gibt es eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{\varphi} : X/G \rightarrow Y/G$ mit $\pi_Y \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi_X$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X/G & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & Y/G \end{array}$$

Beweis. Dies folgt direkt durch Anwendung von Korollar 2.29 auf den Fall $f = \pi_X$ und $g = \pi_Y \circ \varphi$. $\square$

Beispiel 5.25. (1) In der Situation von Beispiel 5.16.(1) sei $p : S^2 \rightarrow [-1, 1]$, $p(x, y, z) = z$. Dann ist p eine stetige surjektive G -äquivariante Abbildung, wenn wir $[-1, 1]$ mit der trivialen G -Wirkung betrachten. Nach Satz 5.24 induziert p eine stetige Abbildung

$$\tilde{p} : S^2/O(2) \rightarrow [-1, 1].$$

Man rechnet leicht nach, dass $\tilde{p}$ bijektiv ist und da $S^2/O(2)$ nach Satz 4.15 kompakt ist, ist $\tilde{p}$ nach Korollar 4.18 ein Homöomorphismus. Also $S^2/O(2) \approx [-1, 1]$.

(2) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, $m, n \in \mathbb{N}$. Dann ist f stetig und eine $\mathbb{R}^*$ -äquivariante Abbildung bezüglich der Multiplikation mit Skalaren. Da f linear ist, lässt sie sich zu einer stetigen $\mathbb{R}^*$ -äquivarianten Abbildung $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ einschränken. Wenden wir Satz 5.24 an, so induziert f nach Beispiel 5.16.(2) eine stetige Abbildung

$$\tilde{f} : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{m-1}.$$

5.3 Homogene Räume

In diesem Abschnitt betrachten wir einen Spezialfall von Gruppenwirkungen, den Fall sogenannter homogener Räume. Diese spielen in der Differentialgeometrie in der Theorie der Lie-Gruppen eine wichtige Rolle und lassen sich grob als „hochsymmetrische Räume“ interpretieren.

Definition 5.26. Sei G eine topologische Gruppe, H eine Untergruppe und betrachte die folgende Äquivalenzrelation:

$$g_1 \sim_H g_2 \quad :\Leftrightarrow \quad g_1 g_2^{-1} \in H.$$

Versehen wir $G/H := G/\sim_H$ mit der Quotiententopologie, so heißt G/H ein *homogener Raum*. Durch Wahl von Repräsentanten erhalten wir eine Bijektion zwischen G/H und der Menge der Linksnebenklassen $\{gH \mid g \in G\}$ von H . Schreibe daher im Folgenden die Elemente von G/H auch als gH , $g \in G$.

Bezeichnet

$$\rho : H \times G \rightarrow G, \quad \rho(h, g) = gh^{-1},$$

die Einschränkung der Multiplikation auf $H \times G$, so ist ρ eine H -Wirkung auf G und ihr Bahnraum G/H stimmt als topologischer Raum mit $G/\sim$ aus der vorigen Definition überein. Homogene Räume sind also Spezialfälle der Konstruktionen aus dem vorigen Abschnitt.

Bemerkung 5.27. Man beachte, dass G/H hier und im Rest des Abschnitts *nicht* den durch Kollabieren von H gebildeten Quotientenraum aus Abschnitt 2.4 bezeichnet.

Satz 5.28. Sei G eine topologische Gruppe und H eine Untergruppe. Dann ist

$$\rho : G \times G/H \rightarrow G/H, \quad \rho(g_1, g_2H) = (g_1g_2)H,$$

eine transitive G -Wirkung auf G/H .

Beweis. Sei $m : G \times G \rightarrow G$ die Multiplikation, $\pi : G \rightarrow G/H$ die kanonische Projektion und betrachte folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{m} & G \\ \text{id}_G \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G \times G/H & \xrightarrow{\rho} & G/H. \end{array}$$

Nach Satz 5.18 ist π offen. Daraus folgt leicht, dass auch $\text{id}_G \times \pi$ offen ist. Damit ist $\text{id}_G \times \pi$ surjektiv, stetig und offen, also nach Satz 2.30 eine Identifizierung. Wenden wir nun Korollar 2.29 auf die stetige Abbildung $g = \pi \circ m$ an, so folgt die Stetigkeit von ρ . Die Eigenschaft (i) und (ii) einer Gruppenwirkung folgen für ρ aus den Gruppengesetzen. Die Transitivität von ρ ist offensichtlich. $\square$

Satz 5.29. Sei G eine topologische Gruppe und H eine Untergruppe. Dann gilt:

- a) G/H ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn H abgeschlossen ist.
- b) G/H ist genau dann diskret, wenn H offen ist.

Beweis. Sei im Folgenden stets $\pi : G \rightarrow G/H$ die kanonische Projektion und e das neutrale Element von G .

- a) „ $\Rightarrow$ “: Ist G/H ein Hausdorff-Raum, so gibt es insbesondere für alle $g \in G \setminus H$ offene Umgebungen U von gH und V von eH in H mit $U \cap V = \emptyset$. Dann ist $\pi^{-1}(U)$ offene Umgebung von g in G mit $\pi^{-1}(U) \subset G \setminus H$, da $\pi(H) = eH$. Also ist $G \setminus H$ offen und damit H abgeschlossen in G .

„ $\Leftarrow$ “: Sei $\varphi : G \times G \rightarrow G$, $\varphi(g, h) = gh^{-1}$. Dann ist

$$\varphi^{-1}(H) = \{(g_1, g_2) \mid g_1g_2^{-1} \in H\} = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \sim_H g_2\} = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{G/H}).$$

Da H abgeschlossen und φ stetig ist, ist damit $(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{G/H})$ abgeschlossen in $G/H \times G/H$. Analog zum Beweis von Satz 5.21 folgt damit, dass $\Delta_{G/H}$ abgeschlossen ist, so dass G/H nach Satz 3.33 ein Hausdorff-Raum ist.

b) G/H ist genau dann diskret, wenn $\{gH\} = \{\pi(g)\}$ für jedes $g \in G$ offen in G ist. Nach Definition der Quotiententopologie ist $\{\pi(g)\}$ genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(\{\pi(g)\}) = gH \subset G$ offen in G ist. Da $gH = \ell_g(H)$ und da ℓ_g nach Satz 5.4 ein Homöomorphismus ist, gilt dies genau dann, wenn H offen ist.

□

Beispiel 5.30. $\mathbb{Q}$ ist Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$, aber nicht abgeschlossen. Also ist der homogene Raum $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ nach Satz 5.29 kein Hausdorff-Raum.

Satz 5.31. Sei G eine topologische Gruppe. Ist N ein abgeschlossener Normalteiler von G , so ist G/N eine topologische Gruppe.

Beweis. Aus der Algebra I wissen wir, dass G/N eine Gruppe ist, wobei die Multiplikation der Linksnebenklassen gegeben ist durch $(gN) \cdot (hN) = (gh)N$ für alle $g, h \in G$. Die Stetigkeit der Multiplikation folgt völlig analog zum Beweis von Satz 5.28.

Seien $i : G \rightarrow G$ und $\tilde{i} : G/N \rightarrow G/N$ die beiden Inversionen. Aus Algebra I wissen wir, dass $\tilde{i}(gN) = g^{-1}N$ für alle $g \in G$. Ist $\pi : G \rightarrow G/N$ die kanonische Projektion, so kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{i} & G \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ G/H & \xrightarrow{\tilde{i}} & G/H \end{array}$$

Da i nach Voraussetzung stetig ist, folgt die Stetigkeit von $\tilde{i}$ durch Anwenden von Korollar 2.29 auf $g = \pi \circ i$. □

Beispiel 5.32. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$. Dann ist $\mathbb{Z}^n$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}^n$ und da $\mathbb{R}^n$ abelsch ist, ist $\mathbb{Z}^n$ Normalteiler. Also ist $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ nach Satz 5.31 eine topologische Gruppe. Diese können wir nun mit einer anderen Gruppe identifizieren.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den n -Torus $T^n := (S^1)^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$. Da S^1 multiplikative Untergruppe von $\mathbb{C}$ ist, besitzt T^n eine Gruppenstruktur als direktes Produkt. Betrachte nun

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n, \quad f(t_1, \dots, t_n) = (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n}).$$

Wir wissen, dass

$$f(t_1 + k_1, \dots, t_n + k_n) = f(t_1, \dots, t_n) \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n,$$

dass also f eine $\mathbb{Z}^n$ -invariante Abbildung ist. Da f surjektiv und stetig ist und man leicht nachrechnet, dass f offen ist, ist f eine Identifizierung und mir obiger Gleichung rechnet man nach, dass $f(x) = f(y)$ genau dann, wenn $x \sim_{\mathbb{Z}^n} y$ in der Notation von Definition 5.26. Folglich induziert f nach Satz 2.31 einen Homöomorphismus $\tilde{f} : \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow T^n$. Man rechnet nach, dass $\tilde{f}$ außerdem ein Gruppenisomorphismus ist.

Satz 5.33. Sei G eine topologische Gruppe, X ein G -Raum und $x_0 \in X$.

a) Die Abbildung $\varphi_0 : G \rightarrow Gx_0$, $\varphi(g) = gx_0$ eine stetige bijektive Abbildung

$$\tilde{\varphi}_0 : G/G_{x_0} \rightarrow Gx_0.$$

b) Ist X ein eigentlicher G -Raum, so ist $\tilde{\varphi}_0$ ein Homöomorphismus.

Beweis. a) Da φ_0 offensichtlich stetig ist und da nach Definition der Standgruppe $\varphi(gh) = \varphi(g)$ für alle $h \in G_{x_0}$, ist φ_0 eine G_{x_0} -invariante Abbildung, also induziert φ_0 nach Satz 5.24 eine stetige Abbildung $\tilde{\varphi}_0 : G/G_{x_0} \rightarrow Gx_0$. Da φ_0 nach Definition surjektiv ist, ist $\tilde{\varphi}_0$ surjektiv. Da

$$\varphi_0(g_1) = \varphi_0(g_2) \Leftrightarrow g_1x_0 = g_2x_0 \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2x_0 = x_0 \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in G_{x_0} \Leftrightarrow g_1 \sim_{G_{x_0}} g_2,$$

folgt, dass $\tilde{\varphi}_0$ injektiv ist.

b) Nach a) und Satz 2.5 reicht es zu zeigen, dass $\tilde{\varphi}_0$ abgeschlossen ist.

Sei $A \subset G/G_{x_0}$ abgeschlossen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\pi^{-1}(A)$ abgeschlossen in G ist, wobei $\pi : G \rightarrow G/G_{x_0}$ die kanonische Projektion sei. Nach Definition ist $\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0 \circ \pi$. Da die G -Wirkung eigentlich ist, ist φ_0 nach Satz 5.22 abgeschlossen, also ist $\varphi_0(\pi^{-1}(A))$ abgeschlossen. Folglich ist

$$(\tilde{\varphi}_0 \circ \pi)(\pi^{-1}(A)) = \tilde{\varphi}_0(A)$$

abgeschlossen und damit $\tilde{\varphi}_0$ abgeschlossen, wobei wir benutzt haben, dass π surjektiv ist. □

Der folgende Satz ist ein Beispiel für die reichhaltigen Zusammenhänge zwischen äquivarianten Abbildungen und Fixpunkten, zwischen denen es sehr tiefgreifende Beziehungen gibt.

Satz 5.34. Sei G eine kompakte Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe und sei X ein G -Raum. Dann ist

$$C_G^0(G/H, X) \approx X^H,$$

wobei $C_G^0(G/H, X) \subset C^0(G/H, X)$ mit der KO-Topologie versehen und X^H die Fixpunktmenge der eingeschränkten H -Wirkung sei.

Beweis. Wir betrachten die Abbildungen

$$\alpha : C_G^0(G/H, X) \rightarrow X^H, \quad \alpha(f) = f(eH),$$

wobei $e \in G$ das neutrale Element bezeichne, und

$$\beta : X^H \rightarrow C_G^0(G/H, X), \quad (\beta(x))(gH) = gx \quad \forall g \in G, x \in X^H.$$

Man überprüft leicht, dass α und β wohldefiniert und invers zueinander sind. Um die Behauptung zu zeigen, reicht es daher zu beweisen, dass beide Abbildungen stetig sind.

Nach Definition ist $\alpha(f) = \text{ev}(f, 1H)$ eine Einschränkung von $\text{ev} : C^0(G/H, X) \times G/H \rightarrow X$. Nach Korollar 4.15 und Satz 5.29 ist G/H kompakter Hausdorff-Raum, also lokal kompakt, so dass nach Korollar 4.57 die Abbildung ev stetig ist, woraus die Stetigkeit von α folgt. β stimmt mit der adjungierten Abbildung $\gamma^\#$ überein, wobei

$$\gamma : X^H \times G/H, \quad \gamma(x, gH) = gx.$$

Aus der Stetigkeit der G -Wirkung folgert man, dass γ stetig ist, also ist nach Satz 4.54 auch β stetig. $\square$

Wir betrachten zum Schluss ein interessantes Beispiel für einen homogenen Raum, welches die Symmetrieeigenschaften von Sphären formalisiert.

Satz 5.35. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir identifizieren $O(n-1)$ mit der Untergruppe von $O(n)$, die durch das Bild des Gruppenhomomorphismus

$$O(n-1) \rightarrow O(n), \quad A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix},$$

wobei mit 0 der Nullvektor in $\mathbb{R}^{n-1}$ gemeint ist. Dann gilt:

$$O(n)/O(n-1) \approx S^{n-1}.$$

Beweis. Betrachte die $O(n)$ -Wirkung

$$O(n) \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}, \quad (A, v) \mapsto Av.$$

Da $O(n)$ nach Satz von Heine-Borel kompakt ist, ist die Wirkung nach Satz 5.20 eigentlich. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass es für alle $v, w \in S^{n-1}$ ein $A \in O(n)$ gibt mit $Av = w$. Also ist die Wirkung transitiv.

Sei $p = (0, \dots, 0, 1) \in S^{n-1}$ der Nordpol der Sphäre und setze $G := O(n)$. Da die Wirkung transitiv ist, ist $Gp = S^{n-1}$. Aus Satz 5.33 folgt

$$S^{n-1} \approx G/G_p.$$

G_p besteht jedoch aus allen Elementen von $O(n)$, die $\{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ invariant lassen, also ist

$$G_p = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \mid A \in O(n-1) \right\},$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

Kapitel 6

Grundbegriffe der Homotopietheorie

6.1 Motivation und Vorgehensweise

In großen Teilen der Topologie beschäftigt man sich damals wie heute auf die eine oder andere Weise mit der Klassifikation von topologischen Räumen. Man schaut sich eine gewisse Familie topologischer Räume an und vergleicht jeweils zwei topologische Räume aus der Familie miteinander, um herauszufinden, ob sie homöomorph sind. Wir haben bisher nur wenige explizite Resultate gesehen, aus denen unmittelbar folgt, dass zwei topologische Räume homöomorph sind, da es dafür wenige allgemeine Vorgehensweisen gibt. Stattdessen wollen wir das Klassifikationsproblem einmal andersrum aufziehen und uns folgende relativ simple Frage stellen.

Frage: *Wie zeigt man, dass zwei topologische Räume nicht homöomorph sind?*

Ein erster wichtiger Ansatz ist das Ausnutzen von topologischen Eigenschaften, also Eigenschaften, die unter Homöomorphismen erhalten bleiben. Von solchen Eigenschaften haben wir einige gesehen, wie etwa Zusammenhang, Trennungseigenschaften und Kompaktheit. So können wir etwa direkt feststellen, dass S^n und $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph sein können, weil S^n kompakt ist, $\mathbb{R}^n$ jedoch nicht. Genauso ist $\mathbb{R}$ nicht homöomorph zur Geraden mit zwei Ursprüngen, da $\mathbb{R}$ ein Hausdorff-Raum ist, die Gerade mit zwei Ursprüngen jedoch nicht. Solche Argumente lassen sich auch auf etwas komplexere Weise nutzen, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 6.1. *Für jedes $n \geq 2$ ist $\mathbb{R}$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe für ein $n \geq 2$ einen Homöomorphismus $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei $p := \Phi(0)$. Da Φ Homöomorphismus ist, ist dann auch die Einschränkung

$$\Phi|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$$

ein Homöomorphismus. Dies ist jedoch bereits ein Widerspruch. Es ist $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ eine Zerlegung in zwei disjunkte nichtleere offene Teilmengen, also ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht zusammenhängend. Andererseits ist $f : \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x) = x - p$, ein Homöomorphismus, es folgt jedoch aus Aufgabe 2 von Blatt 4, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zusammenhängend ist. Also steht die Existenz von Φ im Widerspruch zu Korollar 3.7.a), so dass es keinen solchen Homöomorphismus geben kann. $\square$

Später lässt sich allgemeiner zeigen, dass $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ genau dann homöomorph sind, wenn $n = m$. Für den Beweis werden jedoch bereits komplexere Konstruktionen aus der algebraischen Topologie benötigt, so dass wir ihn an dieser Stelle noch nicht führen können.

Der Ansatz über topologische Eigenschaften von Räumen und Unterräumen stößt leider schnell an seine Grenzen, da es oft darum geht, aus einer Klasse sich grundsätzlich ähnlicher Räume diejenigen herauszufinden, die zueinander homöomorph sind, (zum Beispiel bei der Untersuchung von Mannigfaltigkeiten derselben festen Dimension). In der algebraischen Topologie geht man deshalb oft nach einer Methode vor um Räume zu unterscheiden, die wir im Alltag unbewusst ständig anwenden, wie das folgende Anschauungsbeispiel zeigt.

Nehmen wir an, zwei Menschen unterhalten sich über eine andere Person, sind sich aber nicht sicher, ob sie dieselbe Person meinen. Die beiden Gesprächspartner werden dann anfangen, gewisse *Merkmale* der Personen beschreiben und miteinander zu vergleichen, Größe, Alter, Geschlecht, Augenfarbe, Haarfarbe, Stimmhöhe, ... Wenn sich eines dieser Merkmale bei den beiden Personen unterscheidet, so wissen die Gesprächspartner sofort, dass es sich nicht um dieselbe Person handeln kann.

Das Prinzip solcher „Merkmale“ wollen wir auf die Topologie übertragen, indem wir topologischen Räumen *Invarianten* zuordnen, wobei es sich um Zahlen, Mengen, Gruppen, Ringe oder andere algebraische Objekte handeln kann. Diese Invarianten sollen unter Homöomorphismen erhalten bleiben, sie sollen also homöomorphen Räumen dasselbe Objekt zuordnen.

Haben wir nun zwei beliebige topologische Räume X und Y gegeben und können wir zeigen, dass für eine solche Invariante I gilt, dass $I(X) \neq I(Y)$, so können wir im Umkehrschluss direkt folgern, dass die beiden Räume nicht homöomorph sind.

Betrachten wir nun zwei einfache Räume, die uns in den vorigen Kapiteln bereits begegnet sind: S^2 und T^2 , die 2-Sphäre und der 2-Torus. Bei beiden handelt es sich um Flächen (genauer: zweidimensionale Mannigfaltigkeiten). Betrachten wir Zeichnungen von S^2 und T^2 , so vermuten wir intuitiv sofort, dass diese beiden Räume nicht homöomorph sein können, da sie einen „qualitativen“ Unterschied haben: der Torus hat ein „Loch“, die Sphäre nicht.

Interessanterweise können wir bei diesen beiden Räumen, deren unterschiedliche Gestalt uns gleich ins Auge springt, mit unseren bisher betrachteten Methoden noch nicht zeigen, dass sie nicht homöomorph sind. Beide Räume sind kompakt, zusammenhängend, metrisierbar durch vollständige Metriken und parakompakt.

Tatsächlich¹ reichen die in dieser Vorlesung bisher betrachteten Begriffe nicht aus, um die relativ simple Tatsache zu zeigen, dass die Sphäre und der Torus nicht homöomorph sind.

Unser Wunsch wäre es deshalb, eine Invariante zu bekommen, die auf irgendeine Weise die „Anzahl der Löcher“ einer Fläche misst und die wir daher nutzen können, um die 2-Sphäre vom 2-Torus zu unterscheiden. Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass die Fundamentalgruppe von Räumen dieses Problem löst.

Die Grundidee um derartige Probleme zu untersuchen ist zunächst einen *gröberen* Vergleichsbegriff für topologische Räume einzuführen, der sich leichter überprüfen lässt. Mit „gröber“ sei hierbei gemeint, dass wir einen Vergleichsbegriff wollen, der nicht mehr die gesamten Topologien zweier Räume vergleicht, sondern gewisse qualitative Strukturen dieser Räume, an denen sich oft schon Unterschiede ablesen lassen. Stimmen zwei Räume unter einem solchen gröberen Begriff nicht überein, so können wir insbesondere folgern, dass die Räume nicht homöomorph sind.

Haben wir einen solchen Vergleichsbegriff gefunden, so wollen wir algebraische Invarianten einführen, die sich „gut verhalten“ unter der Anwendung stetiger Abbildungen, d.h. dass wir möglichst genau nachvollziehen können wie eine solche Invariante sich verändert, wenn wir einen Raum stetig auf einen anderen Raum abbilden.

In den folgenden Abschnitten wollen wir die skizzierte Vorgehensweise konkreter machen und formalisieren, indem wir

- den Begriff der *Homotopie* einführen, der die Grundlage für große Teile der weiteren Vorlesungen bilden wird,
- einen gröberen Vergleichsbegriff zwischen Räumen einführen als homöomorph zu sein, die sogenannte *Homotopieäquivalenz* von Räumen,
- einen allgemeinen Rahmen für die Definition von Invarianten topologischer Räume einführen, wozu wir die Sprache der *Kategorien und Funktoren* einführen werden.

6.2 Homotopie

Der Begriff der Homotopie ist der vielleicht wichtigste Begriff der gesamten algebraischen Topologie. Er formalisiert die Vorstellung, dass sich Abbildungen *stetige Deformation* ineinander überführen lassen.

Definition 6.2. Seien X und Y topologische Räume und seien $f, g : X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen.

¹Ich habe hierfür auch eine spontane Befragung einiger mir bekannter Topologen durchgeführt und bedanke mich neben den Leipziger Geometern bei Viktoriya Ozornova, Lennart Meier, Juan Ojeda und Andreas Thom.

(1) Eine *Homotopie von f nach g* ist eine stetige Abbildung

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

so dass

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X.$$

(2) f und g heißen *homotop*, wenn eine Homotopie von f nach g existiert. Sind f und g homotop, so schreiben wir auch $f \simeq g$.

(3) f heißt *nullhomotop*, wenn f homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

Beispiel 6.3. (1) Sei $f : S^2 \rightarrow S^2$, $f(x, y, z) = (-y, x, z)$, die Rotation um die z -Achse um den Winkel $\frac{\pi}{2}$. Dann ist f homotop zu id_{S^2} und eine Homotopie von id_{S^2} nach f ist gegeben durch

$$H : S^2 \times [0, 1] \rightarrow S^2, H((x, y, z), t) = (\cos(t\frac{\pi}{2})x - \sin(t\frac{\pi}{2})y, \sin(t\frac{\pi}{2})x + \cos(t\frac{\pi}{2})y, z).$$

(2) Sei X ein beliebiger topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind zwei stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ stets homotop. Eine Homotopie von f nach g ist gegeben durch

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Insbesondere ist jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ nullhomotop.

Der Begriff der Homotopie definiert eine interessante Relation auf Räumen stetiger Abbildungen, die wir im Folgenden genauer betrachten wollen.

Satz/Definition 6.4. Seien X und Y topologische Räume und $f, g, h \in C^0(X, Y)$.

a) Ist $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie von f nach g , so ist

$$\bar{H} : X \times [0, 1] \rightarrow Y, \quad \bar{H}(x, t) := H(x, 1 - t),$$

eine Homotopie von g nach f .

b) Ist $H_1 : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie von f nach g und $H_2 : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie von g nach h , so ist

$$H_1 \# H_2 : X \times [0, 1] \rightarrow Y, \quad (H_1 \# H_2)(x, t) := \begin{cases} H_1(x, 2t) & \text{falls } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(x, 2t - 1) & \text{falls } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach h .

c) Homotopie definiert eine Äquivalenzrelation auf $C^0(X, Y)$.

Beweis. a) Dies ist klar.

b) Da $H_1(x, 1) = g(x) = H_2(x, 0)$, rechnet man leicht nach, dass $H_1 \# H_2$ wieder stetig ist. Die Behauptung folgt dann direkt aus der Definition.

c) Aus a) folgt, dass $f \simeq g$ genau dann, wenn $g \simeq f$, während nach b) aus $f \simeq g$ und $g \simeq h$ folgt, dass $f \simeq h$. Die Relation $\simeq$ ist also transitiv und symmetrisch.

Da $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, $H(x, t) = f(x) \quad \forall x \in X, t \in [0, 1]$, für eine Homotopie von f nach f , ist $f \simeq f$, wobei $f \in C^0(X, Y)$ beliebig. Also ist $\simeq$ auch reflexiv und damit eine Äquivalenzrelation. □

Definition 6.5. Seien X und Y topologische Räume. Eine Äquivalenzklasse der Relation $\simeq$ auf $C^0(X, Y)$ heißt *Homotopieklasse*. Die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen von X nach Y bezeichnen wir mit

$$[X, Y] := C^0(X, Y) / \simeq.$$

Mengen von Homotopieklassen werden in den folgenden Kapiteln von großer Bedeutung sein, da viele Eigenschaften topologischer Räume in gewissen Homotopieklassen kodiert sind. Zunächst zeigen wir, dass sich eine Verkettungsoperation von Homotopieklassen definieren lässt.

Satz 6.6. Seien X, Y und Z topologische Räume. Seien $f_1, f_2 \in C^0(X, Y)$ und $g_1, g_2 \in C^0(Y, Z)$. Falls $f_1 \simeq f_2$ und $g_1 \simeq g_2$, so ist $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.

Beweis. Seien zunächst $f_1, f_2 \in C^0(X, Y)$ mit $f_1 \simeq f_2$ und $g \in C^0(Y, Z)$. Ist $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie von f_1 nach f_2 , so ist $g \circ H : X \times [0, 1] \rightarrow Z$ eine Homotopie von $g \circ f_1$ nach $g \circ f_2$, also ist dann

$$g \circ f_1 \simeq g \circ f_2. \quad (6.1)$$

Seien nun $g_1, g_2 \in C^0(Y, Z)$ mit $g_1 \simeq g_2$ und sei $f \in C^0(X, Y)$. Für eine Homotopie $h : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ von g_1 nach g_2 sei $h' : X \times [0, 1] \rightarrow Z$, $h'(x, t) = h(f(x), t)$. h' ist stetig, da $h' = h \circ (f \times \text{id}_{[0,1]})$ Verknüpfung stetiger Abbildungen ist. Es folgt nun leicht, dass h' eine Homotopie von $g_1 \circ f$ nach $g_2 \circ f$ ist, also

$$g_1 \circ f \simeq g_2 \circ f. \quad (6.2)$$

Also folgt für die Abbildungen aus dem Satz:

$$g_1 \circ f_1 \stackrel{(6.1)}{\simeq} g_1 \circ f_2 \stackrel{(6.2)}{\simeq} g_2 \circ f_2.$$

□

Korollar 6.7. Seien X, Y und Z topologische Räume. Die Verknüpfung von Abbildungen induziert eine wohldefinierte Abbildung

$$\circ : [Y, Z] \times [X, Y] \rightarrow [X, Z], \quad [f] \circ [g] := [f \circ g].$$

Beweis. Es folgt direkt aus Satz 6.6, dass die Homotopieklasse $[f \circ g]$ unabhängig von den Wahlen von f und g in ihren jeweiligen Homotopieklassen sind. $\square$

Wir wollen nun interessante Abbildungen zwischen Mengen von Homotopieklassen definieren. Mit obigen Ergebnissen werden wir sehen, dass diese auf gewisse Weise „kompatibel“ mit Verkettungen sind, was wir später als Spezialfall eines Begriffs aus der Kategorientheorie betrachten werden.

Definition 6.8. Seien X, Y und Z topologische Räume.

(1) Für $f : Y \rightarrow Z$ stetig sei $f_* : [X, Y] \rightarrow [X, Z], [g] \mapsto [f \circ g]$.

(2) Für $f : Z \rightarrow X$ stetig sei $f^* : [X, Y] \rightarrow [Z, Y], [g] \mapsto [g \circ f]$.

Satz 6.9. Seien W, X, Y und Z topologische Räume.

a) Sind $f_1, f_2 : Y \rightarrow Z$ stetig mit $f_1 \simeq f_2$, so ist $(f_1)_* = (f_2)_* : [X, Y] \rightarrow [X, Z]$.

b) Sind $f_1, f_2 : Z \rightarrow X$ stetig mit $f_1 \simeq f_2$, so ist $(f_1)^* = (f_2)^* : [X, Y] \rightarrow [Z, X]$.

c) Sind $f : Y \rightarrow Z$ und $g : Z \rightarrow W$ stetig, so ist $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : [X, Y] \rightarrow [X, W]$.

d) Sind $f : Z \rightarrow X$ und $g : W \rightarrow Z$ stetig, so ist $(f \circ g)^* = f^* \circ g^* : [X, Y] \rightarrow [W, Y]$.

Beweis. a) Dies folgt direkt aus Satz 6.6 und der Definition der Abbildungen.

b) Dies auch.

c) Nach Definition der Abbildungen ist für jedes $h \in C^0(X, Y)$:

$$(g \circ f)_*([h]) = [(g \circ f) \circ h] = [g \circ (f \circ h)] = g_*([f \circ h]) = (g_* \circ f_*)([h]).$$

d) Analog ist für jedes $h \in C^0(X, Y)$:

$$(f \circ g)^*([h]) = [h \circ (f \circ g)] = [(h \circ f) \circ g] = g^*([h \circ f]) = (g^* \circ f^*)([h]).$$

$\square$

6.3 Homotopieäquivalenz von Räumen

In diesem Abschnitt führen wir den „groben“ Vergleichsbegriff zwischen topologischen Räumen ein, den wir in Abschnitt 6.1 angekündigt haben. Der folgende Begriff drückt grob gesagt aus, dass zwei Räume „bis auf Homotopien“ miteinander übereinstimmen.

Definition 6.10. Seien X und Y topologische Räume.

(1) Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es ein stetiges $g : Y \rightarrow X$ gibt, so dass $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. g heißt dann *homotopieinvers* zu f .

- (2) X und Y heißen *homotopieäquivalent*, wenn es eine Homotopieäquivalenz zwischen ihnen gibt.
- (3) X heißt *zusammenziehbar*, wenn X homotopieäquivalent zu einem einpunktigen Raum ist.

Bemerkung 6.11. (1) Es kann zu einer gegebenen Homotopieäquivalenz im Allgemeinen beliebig viele homotopieinverse Abbildungen geben, sie sind also insbesondere im Allgemeinen nicht eindeutig.

- (2) Sind X, Y und Z topologische Räume mit $X \simeq Y$ und $Y \simeq Z$, so ist $X \simeq Z$. Sind nämlich $f_1 : X \rightarrow Y$ und $f_2 : Y \rightarrow Z$ Homotopieäquivalenzen mit Homotopieinversen $g_1 : Y \rightarrow X$ und $g_2 : Z \rightarrow Y$, so folgt mit Satz 6.6:

$$f_2 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_2 \simeq f_2 \circ g_2 \simeq \text{id}_Z, \quad g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 \simeq g_1 \circ f_1 \simeq \text{id}_X.$$

Also ist $f_2 \circ f_1 : X \rightarrow Z$ eine Homotopieäquivalenz.

Beispiel 6.12. (1) Jeder Homöomorphismus ist eine Homotopieäquivalenz. (Dies ist klar.)

- (2) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$, wobei $\|\cdot\|$ wieder die euklidische Norm bezeichne. Wir wollen zeigen, dass f eine Homotopieäquivalenz ist. Sei $g : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Inklusion. Nach Definition ist $f \circ g = \text{id}_{S^{n-1}}$, also insbesondere $f \circ g \simeq \text{id}_{S^{n-1}}$. Sei nun

$$H : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad H(x, t) = (1 + t(\frac{1}{\|x\|} - 1))x.$$

H ist offensichtlich stetig. Weiterhin ist $H(x, 0) = x$ und $H(x, 1) = \frac{x}{\|x\|} = g(f(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Also ist H eine Homotopie von $\text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ nach $g \circ f$, so dass $g \circ f \simeq \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Also ist f eine Homotopieäquivalenz und g homotopieinvers zu f .

Satz 6.13. Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenziehbar, wenn $\text{id}_X : X \rightarrow X$ nullhomotop ist.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Sei $\{*\}$ ein einpunktiger Raum und $f : X \rightarrow \{*\}$ eine Homotopieäquivalenz. Sei $g : \{*\} \rightarrow X$ homotopieinvers zu f und sei $x_0 := g(*)$. Dann ist $(g \circ f)(x) = x_0$ für alle $x \in X$, also ist $g \circ f$ konstant, und nach Voraussetzung ist $g \circ f \simeq \text{id}_X$.

„ $\Leftarrow$ “: Seien $x_0 \in X$ und sei id_X homotop zur konstanten Abbildung $f : X \rightarrow X$, $f(x) = x_0$. Wir können f schreiben als $f = i \circ g$, wobei $g : X \rightarrow \{x_0\}$ und $i : \{x_0\} \hookrightarrow X$ die Inklusion sei. Nach Definition ist $g \circ i = \text{id}_{\{x_0\}}$. Nach Voraussetzung ist $i \circ g \simeq \text{id}_X$. Also ist g eine Homotopieäquivalenz und damit X zusammenziehbar. $\square$

Beispiel 6.14. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig, d.h. es gibt ein $x_0 \in K$, so dass $(1-t)x + tx_0 \in K$ für alle $x \in K$ und $t \in [0, 1]$. Dann ist K zusammenziehbar. Betrachte nämlich

$$H : K \times [0, 1] \rightarrow K, \quad H(x, t) = (1-t)x + tx_0.$$

H ist offensichtlich stetig und es ist $H(x, 0) = x$ und $H(x, 1) = x_0$ für alle $x \in X$. Also ist H eine Homotopie von id_K zur konstanten Abbildung $K \rightarrow K, x \mapsto x_0$, und die Zusammenziehbarkeit folgt aus Satz 6.13.

Satz 6.15. Seien X, Y und Z topologische Räume.

a) Ist $f : Y \rightarrow Z$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_* : [X, Y] \rightarrow [X, Z]$ bijektiv.

b) Ist $f : Z \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f^* : [X, Y] \rightarrow [Z, Y]$ bijektiv.

Beweis. a) Sei $g : Z \rightarrow Y$ homotopieinvers zu f . Dann gilt nach Satz 6.9.a) und c), dass

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{[X, Y]}, \quad f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\text{id}_Z)_* = \text{id}_{[X, Z]}.$$

Also ist f_* bijektiv mit Umkehrabbildung g_* .

b) Sei $g : X \rightarrow Z$ homotopieinvers zu f . Dann gilt nach Satz 6.9.b) und d), dass

$$g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = (\text{id}_X)^* = \text{id}_{[X, Y]}, \quad f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = (\text{id}_Z)^* = \text{id}_{[Z, Y]}.$$

Also ist f^* bijektiv mit Umkehrabbildung g^* . □

Als nächstes kommen wir zu einer speziellen Form der Homotopieäquivalenz. Wir wollen die Situation genauer untersuchen, in der sich ein Raum in eine Teilmenge hinein deformieren lässt.

Definition 6.16. Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ und $i : A \hookrightarrow X$ die Inklusion.

(1) Eine stetige Abbildung $r : X \rightarrow A$ heißt *Retraktion*, wenn $r(a) = a$ für alle $a \in A$ gilt. A heißt *Retrakt von X* , wenn eine Retraktion $X \rightarrow A$ existiert.

(2) Eine Retraktion $r : X \rightarrow A$ heißt *Deformationsretraktion*, wenn $i \circ r \simeq \text{id}_X$. A heißt dann *Deformationsretrakt von X* .

Bemerkung 6.17. Jede Deformationsretraktion $r : X \rightarrow A$ ist eine Homotopieäquivalenz, da $r \circ i = \text{id}_A$ nach Definition einer Retraktion stets erfüllt ist.

Beispiel 6.18. (1) In Beispiel 6.12.(2) haben wir gezeigt, dass S^{n-1} ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist.

(2) Betrachte das Möbiusband als $M = [-1, 1] / \sim$, wobei $\sim$ erzeugt wird durch $(1, t) \sim (-1, -t)$ für alle $t \in [-1, 1]$ und sei $q : [-1, 1]^2 \rightarrow M$ die Projektion. Dann induziert die Abbildung

$$h : [-1, 1]^2 \times [0, 1] \rightarrow [-1, 1]^2, \quad h(s_1, s_2, t) = (s_1, (1-t)s_2)$$

eine Homotopie $\tilde{h} : M \times [0, 1] \rightarrow M$ von id_M nach $r : M \rightarrow M, r(q(s_1, s_2)) = q(s_1, 0)$. Damit ist $S^1 \times \{0\}$ ein Deformationsretrakt von M , also ist insbesondere $M \simeq S^1$.

Satz/Definition 6.19. Seien X und Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Betrachte den Abbildungszyylinder von f

$$Z_f := (X \times [0, 1]) \cup_{\varphi} Y,$$

die Verklebung mittels $\varphi : X \times \{0\} \rightarrow Y$, $\varphi(x, 0) = f(x)$. Dann ist Y homöomorph zu einem Deformationsretrakt von Z_f .

Beweis. Sei $q : (X \times [0, 1]) \sqcup Y \rightarrow Z_f$ die Quotientenabbildung und $\tilde{Y} := q(Y)$. Mit der Definition der Verklebungsabbildung folgt leicht, dass die Inklusion einen Homöomorphismus von Y auf $\tilde{Y}$ induziert. Es reicht daher zu zeigen, dass $\tilde{Y}$ Deformationsretrakt von Z_f ist. Für $(x, s) \in X \times [0, 1]$ und $y \in Y$ schreiben wir im Folgenden $[x, s] := q(x, s)$ und $[y] := q(y)$.

Seien $\psi_1 : X \times [0, 1] \rightarrow Z_f$, $\psi_1(x, s) = [x, 0]$, und $\psi_2 : Y \rightarrow Z_f$, $\psi_2 = (q \circ j)(y) = [y]$. ψ_1 und ψ_2 sind stetig und nach Definition ist $\psi_2(f(x)) = \psi_1(x, 0)$ für alle $x \in X$. Nach der universellen Eigenschaft der Verklebung aus Korollar 2.49 induzieren ψ_1 und ψ_2 daher ein stetiges

$$\psi : Z_f \rightarrow Z_f,$$

so dass $\psi([y]) = [y]$ für alle $y \in Y$ und $\psi([x, s]) = [x, 0] = [f(x)]$ für alle $(x, s) \in X \times [0, 1]$. Ist $\tilde{\psi} : Z_f \rightarrow \tilde{Y}$ nun die eindeutige stetige Abbildung mit $\psi = i \circ \tilde{\psi}$, wobei $i : \tilde{Y} \hookrightarrow Z_f$ die Inklusion sei, so folgt, dass $\tilde{\psi}$ eine Retraktion von Z_f auf $\tilde{Y}$ ist. Definieren wir

$$h_1 : ((X \times [0, 1]) \sqcup Y) \times [0, 1] \rightarrow Z_f, \quad h_1(x, s, t) = [x, (1-t)s], \quad h_1(y, t) = [y],$$

so ist $h_1(x, 0, t) = h_1(f(x), t)$ für alle $x \in X$ und $t \in [0, 1]$, also induziert h_1 eine Abbildung

$$H_1 : Z_f \times [0, 1] \rightarrow Z_f.$$

Aus der Stetigkeit von h_1 folgt die Stetigkeit von H_1 (genauer argumentiere man hier mit Produkt- und Quotiententopologien), und nach Definition der Abbildungen ist H_1 eine Homotopie von id_{Z_f} nach $\psi = i \circ \tilde{\psi}$. Also ist $\tilde{\psi}$ eine Deformationsretraktion und damit $\tilde{Y}$ ein Deformationsretrakt von Z_f . $\square$

Anschaulich ist der Abbildungszyylinder Z_f im vorigen Satz wie folgt definiert: Wir bilden zunächst die topologische Summe aus dem „Zylinder“ $X \times [0, 1]$ und Y , legen also beide Räume nebeneinander. Da X homöomorph zum Unterraum $X \times \{0\}$ von $X \times [0, 1]$, also dem „Boden“ des Zylinders ist, erhalten wir aus $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung $\varphi : X \times \{0\} \rightarrow Y$, $\varphi(x, 0) = f(x)$, so dass wir nun die Verklebung von $X \times [0, 1]$ und Y mittels φ bilden können wie in Abschnitt 2.6 beschrieben. Wir verkleben also die beiden Räume so miteinander, dass von den Inklusionen in die topologische Summe induzierten Abbildungen $X \times (0, 1] \rightarrow Z_f$ und $Y \rightarrow Z_f$ homöomorph auf ihr Bild abbilden, dass jedoch der Boden des Zylinders entsprechend der Abbildung f verformt und angeklebt wird.

Ist die Abbildung f nicht nur stetig, sondern eine Homotopieäquivalenz, so erhalten wir zusätzlich folgende etwas überraschende Eigenschaft:

Satz 6.20. *Seien X und Y topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ stetig und Z_f der Abbildungszyylinder von f . Ist f eine Homotopieäquivalenz, so ist X homöomorph zu einem Deformationsretrakt von Z_f .*

Beweis. Wir übernehmen die Notation aus dem Beweis von Satz 6.19 und setzen $\tilde{X} := q(X \times \{1\})$. Betrachte die Inklusion $i : X \hookrightarrow (X \times [0, 1]) \sqcup Y$, $i(x) = (x, 1)$. Mit der Definition der Verklebung folgt leicht, dass $q \circ i$ einen Homöomorphismus von X auf $\tilde{X}$ induziert. Es reicht daher zu zeigen, dass $\tilde{X}$ ein Deformationsretrakt von Z_f ist.

Seien zunächst H_1 und ψ gegeben wie im Beweis von Satz 6.19, H_1 ist also eine Homotopie von id_{Z_f} nach $\psi : Z_f \rightarrow Z_f$. ψ deformiert ganz Z_f auf $\tilde{Y}$ und unser nächstes Ziel ist es mit Hilfe von Homotopien ganz $\tilde{Y}$ in $q(f(g(Y))) = q(g(Y) \times \{0\})$ hinein zu deformieren. Sei dazu $g : Y \rightarrow X$ homotopieinvers zu f und seien $F : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie von $f \circ g$ nach id_Y und $G : X \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Homotopie von $g \circ f$ nach id_X . Betrachte die Abbildung

$$H_2 : Z_f \times [0, 1] \rightarrow Z_f,$$

$$H_2([x, s], t) = [F(f(x), 1 - t)] \quad \forall (x, s) \in X \times [0, 1], \quad H_2([y], t) = [F(y, 1 - t)] \quad \forall y \in Y.$$

Man rechnet leicht nach, dass H_2 wohldefiniert und stetig ist. Dann ist H_2 eine Homotopie von ψ nach $\varphi : Z_f \rightarrow Z_f$, welche gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \varphi([x, s]) &= [f(g(f(x)))] = [g(f(x)), 0] \quad \forall (x, s) \in X \times [0, 1], \\ \varphi([y]) &= [f(g(y))] = [g(y), 0] \quad \forall y \in Y. \end{aligned}$$

Insbesondere ist also $\varphi(Z_f) \subset q(g(Y) \times \{0\})$. Sei nun $H_3 : Z_f \times [0, 1] \rightarrow Z_f$ gegeben durch

$$H_3([x, s], t) = [G(x, t), t] \quad \forall (x, s) \in X \times [0, 1], \quad H_3([y], t) = (g(y), t) \quad \forall y \in Y.$$

Man rechnet wieder nach, dass H_3 wohldefiniert und stetig ist. Weiter ist H_3 eine Homotopie von φ nach $r : Z_f \rightarrow Z_f$, wobei

$$r([x, s]) = [x, 1] \quad \forall (x, s) \in X \times [0, 1], \quad r([y]) = [g(y), 1].$$

Man überzeugt sich wieder, dass r stetig ist und sich zu einer Retraktion $r : Z_f \rightarrow \tilde{X}$ einschränkt. Nach Satz 6.4 ist dann $(H_1 \# H_2) \# H_3$ eine Homotopie von id_{Z_f} nach r , also ist $\tilde{X}$ Deformationsretrakt von Z_f . $\square$

Korollar 6.21. *Zwei topologische Räume sind genau dann homotopieäquivalent, wenn sie homöomorph zu Deformationsstrakten eines dritten Raumes sind.*

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Dies folgt aus Satz 6.19 und Satz 6.20.

„ $\Leftarrow$ “: Sind X, Y und Z topologische Räume sind X und Y homöomorph zu Deformationsretrakten von Z , so gilt insbesondere $X \simeq Z$ und $Y \simeq Z$, also auch $X \simeq Z$, siehe Bemerkung 6.11.(2). $\square$

6.4 Kategorien und Funktoren

In diesem Abschnitt betrachten wir die Grundbegriffe der Kategorientheorie, ohne jedoch tiefer in die Kategorientheorie einzusteigen. Stattdessen betrachten wir Beispiele für Kategorien und Funktoren, von denen einige im späteren Verlauf noch benötigt werden.

Die Grundidee hinter Kategorien ist, einen möglichst allgemeinen einheitlichen Rahmen für den Ausdruck mathematischer Strukturen zu finden. Kategorien bestehen einerseits aus *Objekten*, welche für sich genommen zunächst keine Bedeutung haben und andererseits aus *Morphismen* zwischen Objekten, welche die mathematische Struktur wiedergeben, indem sie Beziehungen der Objekte untereinander ausdrücken. Für diese Morphismen existieren Verknüpfungsabbildungen, die die Verkettung von Abbildungen verallgemeinern.

Definition 6.22. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus den folgenden Daten:

- eine Klasse $\text{Ob } \mathcal{C}$, deren Elemente *Objekte von* $\mathcal{C}$ genannt werden,²
- für je zwei Objekte A und B von $\mathcal{C}$ eine Menge $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, deren Elemente *Morphismen von* A *nach* B genannt werden, wobei wir $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ auch als $f : A \rightarrow B$ oder $A \xrightarrow{f} B$ schreiben,
- für je drei Objekte A, B und C eine Abbildung

$$\circ : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

namens *Komposition* oder *Verknüpfung* mit folgenden Eigenschaften:

- für alle Objekte A, B, C und D von $\mathcal{C}$ und alle Morphismen $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$, $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ und $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$

- für jedes Objekt A gibt es ein $1_A \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$, genannt *Identität von* A , so dass für alle Objekte A und B und alle $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt, dass

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f.$$

Ähnlich wie für stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen lassen sich Beziehungen zwischen unterschiedlichen Morphismen einer Kategorie auch durch kommutative Diagramme ausdrücken, wobei jeder Pfeil einem Morphismus entspricht.

²Der Begriff Klasse stammt aus der Mengenlehre und bezeichnet eine Gesamtheit von Objekten, die eine logische Eigenschaft erfüllen, und verallgemeinert grob gesagt den Begriff der Menge. Der wesentliche Grund dafür, dass wir in Kategorien Klassen von Objekten statt nur Mengen betrachten, ist die Beobachtung aus der Mengentheorie, dass „die Menge aller Mengen“ nicht existiert, dass also die Gesamtheit aller Mengen selbst keine Menge bildet. Da die Objekte der Kategorien, die wir hier betrachten, häufig Mengen mit zusätzlicher Struktur sein werden, wie etwa Gruppen oder topologische Räume, tritt das gleiche Paradox dabei wieder auf.

Beispiel 6.23. (1) Set, die Kategorie der Mengen.

- Ob Set ist die Klasse aller Mengen,
- $\text{Mor}_{\text{Set}}(A, B)$ ist die Menge aller Abbildungen von A nach B ,
- $\circ$ ist die übliche Verknüpfung, $1_A = \text{id}_A : A \rightarrow A$ für jede Menge A .

(2) Grp, die Kategorie der Gruppen.

- Ob Grp ist die Klasse aller Gruppen,
- $\text{Mor}_{\text{Grp}}(G, H) = \text{Hom}(G, H) = \{\text{Gruppenhomomorphismen } G \rightarrow H\}$,
- $\circ$ ist die übliche Verknüpfung, $1_G = \text{id}_G : G \rightarrow G$ für jede Gruppe G .

Analog definiert man die Kategorien der Ringe, Körper, $\mathbb{K}$ -Vektorräume, und vieler weiterer algebraischer Strukturen.

(3) Top, die Kategorie der topologischen Räume.

- Ob Top ist die Klasse aller topologischen Räume,
- $\text{Mor}_{\text{Top}}(X, Y) = C^0(X, Y)$
- $\circ$ ist die übliche Verknüpfung, $1_X = \text{id}_X : X \rightarrow X$ für jeden topologischen Raum X .

(4) Top_* , die Kategorie der *punktierten* topologischen Räume.

- Ob Top_* ist die Klasse aller Paare (X, x_0) , wobei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$,
- $\text{Mor}_{\text{Top}_*}((X, x_0), (Y, y_0)) = \{f \in C^0(X, Y) \mid f(x_0) = y_0\}$.
- $\circ$ ist die übliche Verknüpfung, $1_X = \text{id}_X : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ für jeden topologischen Raum X und jedes $x_0 \in X$.

(5) HoTop, die *Homotopiekategorie*.

- Ob HoTop ist die Klasse aller topologischen Räume,
- $\text{Mor}_{\text{HoTop}}(X, Y) = [X, Y] = C^0(X, Y) / \simeq$
- $\circ$ sind die von der üblichen Verknüpfung induzierten Abbildungen aus Korollar 6.7, $1_X = [\text{id}_X] \in [X, X]$ für jeden topologischen Raum X .

Die Assoziativität der Komposition in HoTop folgt aus der Assoziativität der Verknüpfung von Abbildungen.

(6) Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge $(M, \leq)$. Definiere eine Kategorie $\mathcal{M}$ durch

- Ob $\mathcal{M} = M$, $\text{Mor}_{\mathcal{M}}(a, b) = \begin{cases} \{f_{a,b}\} & \text{falls } a \leq b, \\ \emptyset & \text{falls nicht,} \end{cases}$

- für $a, b, c \in M$ mit $a \leq b$ und $b \leq c$ sei $f_{b,c} \circ f_{a,b} := f_{a,c}$ und für $a \in M$ sei $1_a = f_{a,a}$.

(7) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Definiere eine Kategorie $\mathcal{G}$ durch

- $\text{Ob } \mathcal{G} = \{*\}$, $\text{Mor}_{\mathcal{G}}(*, *) = G$,
- $g \circ h := g \cdot h$, $1_* := e$, das neutrale Element von G .

Die geforderten Eigenschaften der Komposition sind in diesem Fall nichts anders als die Gruppenaxiome und deshalb erfüllt.

Um uns von einer Kategorie zu einer anderen Kategorie bewegen zu können, benötigen wir den Begriff des Funktors.

Definition 6.24. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien.

(1) Ein kovarianter Funktor $\mathcal{F}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ besteht aus

- einer Zuordnung $\mathcal{F} : \text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$,
- zu je zwei Objekten A und B von $\mathcal{C}$ eine Abbildung

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)),$$

für die gilt, dass

- (i) $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$,
- (ii) für alle Objekte A, B und C von $\mathcal{C}$ gilt

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g) \quad \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

Ist $\mathcal{F}$ ein kovarianter Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, so schreiben wir auch $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

(2) Ein kontravarianter Funktor $\mathcal{F}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ besteht aus

- einer Zuordnung $\mathcal{F} : \text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$,
- zu je zwei Objekten A und B von $\mathcal{C}$ eine Abbildung

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A)),$$

für die gilt, dass

- (i) $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$,
- (ii) für alle Objekte A, B und C von $\mathcal{C}$ gilt

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f) \quad \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

Ist $\mathcal{F}$ ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, so schreiben wir $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$.

Bemerkung 6.25. In manchen Büchern und Arbeiten wird ein kovarianter Funktor schlicht als *Funktor* und ein kontravarianter Funktor als *Kofunktor* bezeichnet.

Beispiel 6.26. (1) Der *Wegkomponentenfunktor* ist ein kovarianter Funktor

$$\pi_0 : \text{Top} \rightarrow \text{Set},$$

der wie folgt gegeben ist:

- Für einen topologischen Raum X sei

$$\pi_0(X) := \mathcal{W}(X) = \{\text{Wegzusammenhangskomponenten von } X\}.$$

- Für $f \in \text{Mor}_{\text{Top}}(X, Y) = C^0(X, Y)$ sei

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y),$$

$$(\pi_0(f))(C) = \text{die Wegzusammenhangskomponente von } Y, \text{ die } f(C) \text{ enthält.}$$

$\pi_0(f)$ ist nach Satz 3.18 wohldefiniert. Man überlegt sich leicht, dass π_0 die Eigenschaften eines Funktors erfüllt.

(2) Wir erhalten einen Funktor $\text{Ho} : \text{Top} \rightarrow \text{HoTop}$ durch

- $\text{Ho}(X) = X$ für alle topologischen Räume X ,
- für alle topologischen Räume X und Y und alle $f \in C^0(X, Y)$ sei

$$\text{Ho}(f) = [f] \in [X, Y] = \text{Mor}_{\text{HoTop}}(X, Y).$$

(3) Die vergesslichen Funktoren $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ und $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$. Diese fassen Gruppen bzw. topologische Räume nur als Mengen auf und Gruppenhomomorphismen bzw. stetige Abbildungen einfach nur als Abbildungen zwischen Mengen und „vergessen“ die zusätzliche Struktur der Kategorie.

(4) Sei Z ein topologischer Raum. Dann erhalten wir einen kovarianten Funktor $\mathcal{F}_Z : \text{Top} \rightarrow \text{Top}$ durch

- $\mathcal{F}_Z(X) = C^0(Z, X)$ für jeden topologischen Raum X , wobei wir $C^0(Z, X)$ mit der KO-Topologie betrachten,
- für topologische Räume X und Y und $f : X \rightarrow Y$ sei

$$\mathcal{F}_Z(f) = f_* : C^0(Z, X) \rightarrow C^0(Z, Y),$$

wobei f_* definiert sei wie in Satz 4.51.a). Nach Satz 4.51.a) ist

$$\mathcal{F}_Z(f) \in C^0(C^0(Z, X), C^0(Z, Y)) = \text{Mor}_{\text{Top}}(C^0(Z, X), C^0(Z, Y)),$$

also ist $\mathcal{F}_Z(f)$ wohldefiniert. Die Funktoreigenschaften folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der Komposition von Abbildungen.

(5) Sei Z ein topologischer Raum. Dann erhalten wir einen kontravarianten Funktor $\mathcal{F}^Z : \text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$ durch

- $\mathcal{F}^Z(X) = C^0(X, Z)$ für jeden topologischen Raum X ,
- für topologische Räume X und Y und $f : X \rightarrow Y$ sei

$$\mathcal{F}^Z(f) = f^* : C^0(Y, Z) \rightarrow C^0(X, Z),$$

wobei f^* definiert sei wie in Satz 4.51.b). Nach Satz 4.51.b) ist

$$\mathcal{F}^Z(f) \in C^0(C^0(Y, Z), C^0(X, Z)) = \text{Mor}_{\text{Top}}(C^0(Y, Z), C^0(X, Z)),$$

also ist $\mathcal{F}^Z(f)$ wohldefiniert. Die Funktoreigenschaften folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der Komposition von Abbildungen.

(6) Sei Z ein topologischer Raum. Analog zu den letzten beiden Beispielen erhalten wir einen kovarianten Funktor $\mathcal{H}_Z : \text{HoTop} \rightarrow \text{Set}$ durch

- $\mathcal{H}_Z(X) = [Z, X]$ für jeden topologischen Raum X ,
- für alle topologischen Räume X und Y und $f \in C^0(X, Y)$ sei

$$\mathcal{H}_Z([f]) = f_* : [Z, X] \rightarrow [Z, Y].$$

$\mathcal{H}_Z([f])$ ist wohldefiniert, da f_* nach Satz 6.9.a) nur von der Homotopieklasse von f abhängt. Mit Satz 6.9.c) folgen die Funktoreigenschaften.

und einen kontravarianten Funktor $\mathcal{H}^Z : \text{HoTop}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ durch

- $\mathcal{H}^Z(X) = [X, Z]$ für jeden topologischen Raum X ,
- für alle topologischen Räume X und Y und $f \in C^0(X, Y)$ sei

$$\mathcal{H}^Z([f]) = f^* : [Y, Z] \rightarrow [X, Z].$$

$\mathcal{H}^Z([f])$ ist wohldefiniert, da f^* nach Satz 6.9.b) nur von der Homotopieklasse von f abhängt. Mit Satz 6.9.d) folgen die Funktoreigenschaften.

Die allgemeine Vorgehensweise der algebraischen Topologie lässt sich nun durch Kategorien und Funktoren formulieren:

Finde Funktoren von „topologischen Kategorien“ wie Top oder HoTop in „algebraische Kategorien“ wie zum Beispiel Grp , die sich möglichst gut berechnen lassen, und benutze sie um topologische Räume zu klassifizieren.

Für eine tiefgehende Einführung in die Kategorientheorie mit Blick auf konkrete Anwendungen sei das folgende Buch empfohlen:

Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Dover Publications, 2016,
<http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf>,

sowie das folgende kurze Büchlein, das via VPN-Zugang zur Uni Leipzig kostenlos heruntergeladen werden kann:

Jürgen Jost, *Kategorientheorie*, Springer essentials, 2019,
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-28313-1>.

Die „klassische“ Referenz für Kategorientheorie ist das folgende Lehrbuch, das einen sehr schönen Titel trägt:

Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Second Edition, Springer, Graduate Texts in Mathematics, 1998.

6.5 Homotopien von Wegen

Wir führen zunächst einen allgemeinen relativen Homotopiebegriff ein, den wir im Folgenden vor allem auf Wege und ihre Anfangs- und Endpunkte anwenden wollen. Mit relativer Homotopie ist gemeint, dass wir zwei Abbildungen zwischen topologischen Räumen, die auf einem Unterraum miteinander übereinstimmen, durch eine Homotopie verbinden wollen, die auf diesem Unterraum konstant bleibt.

Definition 6.27. Seien X und Y topologische Räume, sei $A \subset X$ und seien $f, g \in C^0(X, Y)$ mit $f|_A = g|_A$. f und g heißen *homotop relativ zu A* , wenn es eine Homotopie $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ von f nach g gibt, für die zusätzlich gilt, dass

$$H(a, t) = f(a) = g(a) \quad \forall a \in A, t \in [0, 1].$$

Sind f und g homotop relativ zu A , so schreiben wir $f \simeq_A g$. Analog zu Satz/Definition 6.4 zeigt man, dass $\simeq_A$ eine Äquivalenzrelation auf $C^0(X, Y)$ induziert, die wir wieder mit $\simeq_A$ bezeichnen. Ist $B \subset Y$, so bezeichnen wir

$$[X, A; Y, B] := \{f \in C^0(X, Y) \mid f(A) \subset B\} / \simeq_A.$$

Diese Vorstellung wollen wir nun auf Wege in topologischen Räumen anwenden, deren Endpunkte übereinstimmen.

Definition 6.28. Sei X ein topologischer Raum.

(1) Sei $PX := C^0([0, 1], X)$ der Raum der Wege in X . Für alle $x_0, x_1 \in X$ sei

$$P(X, x_0, x_1) := \{\gamma \in PX \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}$$

der Raum der Wege in X von x_0 nach x_1 .

(2) Für jedes $x \in X$ sei $c_x \in PX$, $c_x(t) = x$, der konstante Weg von x nach x .

- (3) $\gamma_0, \gamma_1 \in PX$ mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ heißen *weghomotop*, wenn sie homotop relativ zu $\{0, 1\}$ sind. Schreibe dann auch

$$\gamma_0 \simeq_w \gamma_1 \quad :\Leftrightarrow \quad \gamma_0 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1.$$

Eine Homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ von γ_0 nach γ_1 heißt dann *Weghomotopie*, wenn $H(0, t) = \gamma_0(0)$ und $H(1, t) = \gamma_0(1)$ für alle $t \in [0, 1]$ erfüllt ist. Die Weghomotopieklasse von $\gamma \in PX$ bezeichnen wir mit $[\gamma]_w$.

- (4) Für $x_0, x_1 \in X$ und $\gamma \in P(X, x_0, x_1)$ sei $\bar{\gamma} \in P(X, x_1, x_0)$ gegeben durch

$$\bar{\gamma}(s) := \gamma(1 - s) \quad \forall s \in [0, 1].$$

- (5) Für $\alpha, \beta \in PX$ mit $\alpha(1) = \beta(0)$ ist die *Konkatenation* oder *Hintereinanderhängung* von α und β gegeben durch

$$\alpha * \beta \in PX, \quad (\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2s - 1) & \text{falls } s \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Die grundlegenden Eigenschaften von Homotopien von Wegen aus den folgenden Sätzen werden wir im nächsten Kapitel benutzen, um Fundamentalgruppen zu konstruieren.

Satz 6.29. Sei X ein topologischer Raum, $x_0, x_1 \in X$ und $\gamma \in P(X, x_0, x_1)$. Dann gilt:

- a) $\gamma * c_{x_1} \simeq_w \gamma \simeq_w c_{x_0} * \gamma$.
b) $\gamma * \bar{\gamma} \simeq_w c_{x_0}$ und $\bar{\gamma} * \gamma \simeq_w c_{x_1}$.

Beweis. a) Nach Definition ist

$$(\gamma * c_{x_1})(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ x_1 & \text{falls } s \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Man sieht damit leicht, dass wir eine Homotopie von γ nach $\gamma * c_{x_1}$ erhalten durch

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad H(s, t) = \begin{cases} \gamma((1+t)s) & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{1+t}], \\ x_1 & \text{falls } s \in (\frac{1}{1+t}, 1]. \end{cases}$$

Außerdem ist $H(0, t) = \gamma(0) = x_0$ und $H(1, t) = x_1$ für alle $t \in [0, 1]$. Also ist $\gamma \simeq_w \gamma * c_{x_1}$. Weiterhin ist

$$(c_{x_0} * \gamma)(s) = \begin{cases} x_0 & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2s - 1) & \text{falls } s \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

woraus man sieht, dass wir eine Homotopie von γ nach $c_{x_0} * \gamma$ erhalten durch

$$H' : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad H'(s, t) = \begin{cases} x_0 & \text{falls } s \in [0, \frac{t}{1+t}], \\ \gamma((1+t)s - t) & \text{falls } s \in (\frac{t}{1+t}, 1]. \end{cases}$$

Da $H'(0, t) = x_0$ und $H'(1, t) = \gamma(1) = x_1$ für alle $t \in [0, 1]$, folgt $\gamma \simeq_w c_{x_0} * \gamma$.

b) Nach Definition ist

$$(\gamma * \bar{\gamma})(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2-2s) & \text{falls } s \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Daraus erkennt man, dass man eine Homotopie von $\gamma * \bar{\gamma}$ nach c_{x_0} bekommt durch

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad H(s, t) = \begin{cases} \gamma(2(1-t)s) & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2(1-t)(1-s)) & \text{falls } s \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Insbesondere gilt $H(0, t) = x_0 = H(1, t)$ für alle $t \in [0, 1]$, also ist $\gamma * \bar{\gamma} \simeq_w c_{x_0}$. Ersetzen wir γ durch $\bar{\gamma}$, so folgt wegen $\bar{\bar{\gamma}} = \gamma$ auch der andere Teil der Behauptung. $\square$

Satz 6.30. Sei X ein topologischer Raum und seien $\alpha, \beta, \gamma \in PX$, so dass $\alpha(1) = \beta(0)$ und $\beta(1) = \gamma(0)$. Dann gilt:

a) $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq_w \alpha * (\beta * \gamma)$.

b) Für jeden topologischen Raum Y und jedes $f \in C^0(X, Y)$ ist

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta).$$

Beweis. a) Nach Definition ist für alle $s \in [0, 1]$:

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(s) = \begin{cases} \alpha(4s) & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{4}], \\ \beta(4s-1) & \text{falls } s \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2s-1) & \text{falls } s \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

und

$$(\alpha * (\beta * \gamma))(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(4s-2) & \text{falls } s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ \gamma(4s-3) & \text{falls } s \in (\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

Man überlege sich damit, dass wir eine Homotopie von $(\alpha * \beta) * \gamma$ nach $\alpha * (\beta * \gamma)$ erhalten durch

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad H(s, t) = \begin{cases} \alpha(\frac{4s}{t+1}) & \text{falls } s \in [0, \frac{t+1}{4}], \\ \beta(4s-1-t) & \text{falls } s \in (\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}], \\ \gamma(\frac{4s-t-2}{2-t}) & \text{falls } s \in (\frac{t+2}{4}, 1]. \end{cases}$$

Weiter ist $H(0, t) = \alpha(0)$ und $H(1, t) = \gamma(1)$ für alle $t \in [0, 1]$, woraus folgt, dass $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq_w \alpha * (\beta * \gamma)$.

b) Dies folgt unmittelbar aus der Definition. $\square$

Satz 6.31. Seien $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in PX$ mit $\alpha_0(0) = \alpha_1(0)$, $\alpha_0(1) = \alpha_1(1) = \beta_0(0) = \beta_1(0)$ und $\beta_0(1) = \beta_1(1)$. Dann gilt: Ist $\alpha_0 \simeq_w \alpha_1$ und $\beta_0 \simeq_w \beta_1$, so ist $\alpha_0 * \beta_0 \simeq_w \alpha_1 * \beta_1$.

Beweis. Sei $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Weghomotopie von α_0 nach α_1 und $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Weghomotopie von β_0 nach β_1 . Dann rechnet man leicht nach, dass durch

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ G(2s - 1, t) & \text{falls } s \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

eine Homotopie von $\alpha_0 * \beta_0$ nach $\alpha_1 * \beta_1$ gegeben ist. Da F und G Wegehomo-
topien sind, folgt weiterhin, dass

$$H(0, t) = F(0, t) = \alpha_0(0), \quad H(1, t) = G(1, t) = \beta_0(1),$$

für alle $t \in [0, 1]$ erfüllt ist, also ist H eine Weghomotopie, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Die Resultate aus den letzten Sätzen können wir nun nutzen, um jedem topologischen Raum eine Kategorie zuzuordnen, deren Morphismen durch Weghomotopieklassen definiert sind.

Satz 6.32. a) Sei X ein topologischer Raum und setze

- $\text{Ob } \Pi(X) = X$,
- $\text{Mor}_{\Pi(X)}(x_0, x_1) := P(X, x_0, x_1) / \simeq_w$ für alle $x_0, x_1 \in X$,
- $\circ : \text{Mor}_{\Pi(X)}(x_1, x_2) \times \text{Mor}_{\Pi(X)}(x_0, x_1) \rightarrow \text{Mor}_{\Pi(X)}(x_0, x_2)$,

$$[\beta]_w \circ [\alpha]_w := [\alpha * \beta]_w,$$

für alle $x_0, x_1, x_2 \in X$.

- $1_x := [c_x]_w \in \text{Mor}_{\Pi(X)}(x, x)$ für alle $x \in X$.

Dann wird durch diese Daten eine Kategorie $\Pi(X)$ definiert.

b) Seien X und Y topologische Räume und sei $f \in C^0(X, Y)$. Dann erhalten wir einen kovarianten Funktor $\mathcal{F}_f : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$ durch

- $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$ für alle $x \in \text{Ob } \Pi(X)$,
- für $x_0, x_1 \in X$ und $\gamma \in P(X, x_0, x_1)$ sei $\mathcal{F}_f([\gamma]_w) = f_*([\gamma]_w) = [f \circ \gamma]_w$.

Beweis. a) Nach Satz 6.31.a) ist $\circ$ wohldefiniert, da $[\alpha * \beta]$ nur von den Homotopieklassen von α und β abhängt. Nach Satz 6.30 gilt für alle $x_0, x_1, x_2, x_3 \in X$, $\alpha \in P(X, x_0, x_1)$, $\beta \in P(X, x_1, x_2)$ und $\gamma \in P(X, x_2, x_3)$, dass

$$\begin{aligned} ([\gamma]_w \circ [\beta]_w) \circ [\alpha]_w &= [\beta * \gamma]_w \circ [\alpha]_w = [\alpha * (\beta * \gamma)]_w = [(\alpha * \beta) * \gamma]_w \\ &= [\gamma]_w \circ [\alpha * \beta]_w = [\gamma]_w \circ ([\beta]_w \circ [\alpha]_w). \end{aligned}$$

Also ist $\circ$ assoziativ. Weiterhin folgt mit Satz 6.29.a), dass

$$1_{x_1} \circ [\alpha]_w = [\alpha * c_{x_1}]_w = [\alpha]_w = [c_{x_0} * \alpha]_w = [\alpha]_w \circ 1_{x_0},$$

also erfüllt $\Pi(X)$ die Eigenschaften einer Kategorie.

b) Da für jedes $x \in X$ gilt, dass $f \circ c_x = c_{f(x)} \in PY$, folgt für alle $x \in X$, dass

$$\mathcal{F}_f(1_x) = \mathcal{F}_f([c_x]_w) = [c_{f(x)}]_w = 1_{f(x)}.$$

Weiter folgt aus Satz 6.30.b) für alle $x_0, x_1, x_2 \in X$, $\alpha \in P(X, x_0, x_1)$ und $\beta \in P(X, x_1, x_2)$, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_f([\beta]_w \circ [\alpha]_w) &= \mathcal{F}_f([\alpha * \beta]_w) = [f \circ (\alpha * \beta)]_w = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)]_w \\ &= [f \circ \beta]_w \circ [f \circ \alpha]_w = \mathcal{F}_f([\beta]_w) \circ \mathcal{F}_f([\alpha]_w). \end{aligned}$$

Also erfüllt $\mathcal{F}_f$ die Funktoreigenschaften. □

Bemerkung 6.33. Man beachte, dass die Konstruktion einer Kategorie wie in Satz 6.32 *nicht* funktionieren würde, wenn wir statt der Weghomotopieklassen die Wegeräume $P(X, x_0, x_1)$ selbst als Morphismenmengen wählen und die Verknüpfung wieder durch Konkatenation definieren würden. Im Allgemeinen stimmen nämlich $(\alpha * \beta) * \gamma$ und $\alpha * (\beta * \gamma)$ nicht überein, also wäre in diesem Fall die Assoziativität der Verknüpfung verletzt, die in einer Kategorie vorausgesetzt wird.

Definition 6.34. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

- (1) Seien X und Y Objekte von $\mathcal{C}$. Ein Morphismus $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ heißt *Isomorphismus*, wenn es ein $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ gibt, so dass $g \circ f = 1_X$ und $f \circ g = 1_Y$. Schreibe dann auch $f^{-1} := g$.
- (2) $\mathcal{C}$ heißt *Gruppoid*, wenn jeder Morphismus von $\mathcal{C}$ ein Isomorphismus ist.

Beispiel 6.35. In Beispiel 6.23.(7) haben wir jeder Gruppe G eine Kategorie $\mathcal{G}$ zugeordnet. Jedes solche $\mathcal{G}$ ist ein Gruppoid, wie man leicht aus den Gruppengesetzen folgert.

Satz/Definition 6.36. Sei X ein topologischer Raum. Die Kategorie $\Pi(X)$ ist ein Gruppoid und heißt das Fundamentalgruppoid von X . Für jedes $\gamma \in PX$ ist $[\gamma]_w^{-1} = [\bar{\gamma}]_w$.

Beweis. Seien $x_0, x_1 \in X$ beliebig und sei $\gamma \in P(X, x_0, x_1)$, so dass $[\gamma]_w \in \text{Mor}_{\Pi(X)}(x_0, x_1)$. Dann ist $[\bar{\gamma}]_w \in \text{Mor}_{\Pi(X)}(x_1, x_0)$ und nach Satz 6.29.b) ist

$$[\bar{\gamma}]_w \circ [\gamma]_w = [\gamma * \bar{\gamma}]_w = [c_{x_0}]_w = 1_{x_0}, \quad [\gamma]_w \circ [\bar{\gamma}]_w = [\bar{\gamma} * \gamma]_w = [c_{x_1}]_w = 1_{x_1}.$$

Also ist $[\gamma]_w$ ein Isomorphismus in $\Pi(X)$ mit $[\gamma]_w^{-1} = [\bar{\gamma}]_w$. □

Kapitel 7

Die Fundamentalgruppe

Wir nehmen in diesem und den folgenden Kapiteln einen Teil des Fundamentalgruppoiden genauer unter die Lupe, die sogenannte *Fundamentalgruppe* eines Raumes. Dabei sehen wir, dass die Konkatenation auf der Menge der Weghomotopieklassen geschlossener Kurven mit festem Anfangs- und Endpunkt eine Gruppenstruktur definiert und untersuchen diese genauer.

Weiterhin lernen wir einen strengeren Zusammenhangsbegriff für topologische Räume kennen, nämlich einfach zusammenhängende Räume, in welchen zusätzlich zum Wegzusammenhang verlangt wird, dass die Fundamentalgruppe des Raums trivial ist.

Nachdem wir uns den Unterschied zwischen Weghomotopien und Homotopien von Schleifen anschauen, die nicht notwendigerweise den Basispunkt erhalten, werden wir die Fundamentalgruppen von Sphären explizit ausrechnen. Schließlich beenden wir das Kapitel mit einigen geometrischen Anwendungen und beweisen einige klassische Sätze der Topologie wie etwa den Satz von Borsuk-Ulam.

In diesem Kapitel werden wir folgende Grundbegriffe der Gruppentheorie benutzen: direktes Produkt von Gruppen, Konjugationsklassen.

7.1 Definition und Eigenschaften der Fundamentalgruppe

Wir setzen unsere Betrachtungen aus Abschnitt 6.5 fort und wollen einen Ausschnitt des Fundamentalgruppoiden genauer unter die Lupe nehmen.

Definition 7.1. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$.

- (1) Eine *Schleife* in X ist ein Weg $\gamma \in PX$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$.
- (2) Sei $\Omega(X, x_0) := P(X, x_0, x_0) = \{\gamma \in PX \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$ der *Schleifenraum* von X in x_0 .

- (3) Setze

$$\pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0) / \simeq_w .$$

und setze $[\alpha]_w \cdot [\beta]_w := [\alpha * \beta]_w$ für alle $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$. $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ heißt die *Fundamentalgruppe von X im Basispunkt x_0* .

Bemerkung 7.2. Wir können die unterliegende Menge der Fundamentalgruppe (d.h. ohne Beachtung der Gruppenstruktur) auf drei andere Arten charakterisieren:

(i) als eine Morphismenmenge des Fundamentalgruppoiden $\Pi(X)$:

$$\pi_1(X, x_0) = \text{Mor}_{\Pi(X)}(x_0, x_0),$$

(ii) durch relative Homotopieklassen: $\pi_1(X, x_0) = [[0, 1], \{0, 1\}; X, \{x_0\}]$,

(iii) als Menge der Wegkomponenten des Schleifenraums, genauer gibt es eine Bijektion

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{1:1} \pi_0(\Omega(X, x_0)).$$

(Dies ist in Aufgabe 4 von Übungsblatt 10 zu beweisen.)

Satz 7.3. Sei X und Y topologische Räume und sei $x_0 \in X$. Dann gilt:

a) $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ ist eine Gruppe mit neutralem Element $1_{x_0} = [c_{x_0}]_w$. Für jedes $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ ist $[\alpha]_w^{-1} = [\bar{\alpha}]_w$.

b) Ist $f \in C^0(X, Y)$, so ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$, $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$, ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. a) Da nach Definition $[\alpha]_w \cdot [\beta]_w = [\beta]_w \circ [\alpha]_w$, wobei $\circ$ die Verknüpfung in $\Pi(X)$ bezeichne, folgen die Gruppeneigenschaften aus den in Satz 6.32.a) gezeigten Kategorieeigenschaften von $\Pi(X)$. Die Eigenschaft der Inversen folgt dann aus dem Beweis von Satz/Definition 6.36.

b) Nach Definition ist $f_* : \text{Mor}_{\Pi(X)}(x_0, x_0) \rightarrow \text{Mor}_{\Pi(Y)}(f(x_0), f(x_0))$ die Einschränkung des Funktors $\mathcal{F}_f : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$ und die Homomorphismeigenschaft folgt aus den Funktoreigenschaften von $\mathcal{F}_f$ aus Satz 6.32.b).

□

Mit Hilfe des letzten Satzes können wir die Eigenschaften der Fundamentalgruppen auch auf andere Weise als Funktor ausdrücken.

Korollar 7.4. Es ist ein kovarianter Funktor $\pi_1 : \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$ gegeben durch die Zuordnungen

- $\text{Ob Top}_* \rightarrow \text{Ob Grp}, (X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0),$
- $\text{Mor}_{\text{Top}_*}((X, x_0), (Y, y_0)) \rightarrow \text{Mor}_{\text{Grp}}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0)), f \mapsto \pi_1(f) := f_*.$

Beweis. Die Wohldefiniertheit von π_1 folgt aus Satz 7.3, es bleiben noch die Funktoreigenschaften zu zeigen. Aus der Definition ist direkt ersichtlich, dass für jeden topologischen Raum X und jedes $x_0 \in X$ gilt, dass

$$\pi_1(\text{id}_X) = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}.$$

Sind X, Y und Z topologische Räume, $f \in C^0(Y, Z)$ und $g \in C^0(X, Y)$, so gilt nach Satz 6.9.c), dass

$$\pi_1(f \circ g) = (f \circ g)_* = f_* \circ g_* = \pi_1(f) \circ \pi_1(g).$$

Also ist π_1 ein kovarianter Funktor. □

Bemerkung 7.5. In Korollar 7.4 wird sichtbar, dass die Fundamentalgruppe ein Beispiel eines Funktors von einer „topologischen Kategorie“ in eine „algebraische Kategorie“ ist, der also, wie wir in Abschnitten 6.1 und 6.4 skizziert haben, topologischen Räumen algebraische Invarianten zuordnet.

Satz 7.6. Sei X ein topologischer Raum. Liegen $x_0, x_1 \in X$ in derselben Wegzusammenhangskomponente von X und ist $\gamma \in P(X, x_0, x_1)$, so ist die Abbildung

$$\ell_\gamma : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1), \quad [\alpha]_w \mapsto [\gamma]_w \circ [\alpha]_w \circ [\gamma]_w^{-1} = [(\tilde{\gamma} * \alpha) * \gamma]_w,$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Schreibe in diesem Beweis $[\cdot] := [\cdot]_w$. Wir erhalten aus Satz 6.32 und Satz/Definition 6.36 für alle $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$, dass

$$\begin{aligned} \ell_\gamma([\alpha] \cdot [\beta]) &= [\gamma] \circ ([\beta] \circ [\alpha]) \circ [\gamma]^{-1} = [\gamma] \circ [\beta] \circ 1_{x_0} \circ [\alpha] \circ [\gamma]^{-1} \\ &= [\gamma] \circ [\beta] \circ [\gamma]^{-1} \circ [\gamma] \circ [\alpha] \circ [\gamma]^{-1} = \ell_\gamma([\alpha]) \cdot \ell_\gamma([\beta]), \end{aligned}$$

also ist ℓ_γ ein Gruppenhomomorphismus. Weiter ist

$$(\ell_{\tilde{\gamma}} \circ \ell_\gamma)([\alpha]) = [\tilde{\gamma}] \circ [\gamma] \circ [\alpha] \circ [\gamma]^{-1} \circ [\tilde{\gamma}]^{-1} = [\gamma]^{-1} \circ [\gamma] \circ [\alpha] \circ [\gamma]^{-1} \circ [\gamma] = [\alpha],$$

also $\ell_{\tilde{\gamma}} \circ \ell_\gamma = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$. Völlig analog folgt $\ell_\gamma \circ \ell_{\tilde{\gamma}} = \text{id}_{\pi_1(X, x_1)}$, also ist ℓ_γ ein Gruppenisomorphismus. □

Aus diesem Satz erhalten wir unmittelbar die wichtige Folgerung, dass die Isomorphieklasse der Fundamentalgruppe in wegzusammenhängenden Räumen nicht von der Wahl des Basispunktes abhängt.

Korollar 7.7. Ist X wegzusammenhängend, so gilt für alle $x_0, x_1 \in X$, dass

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1).$$

Bemerkung 7.8. Ist X wegzusammenhängend und interessieren wir uns nur für die Isomorphieklasse der Fundamentalgruppe, so schreiben wir daher auch $\pi_1(X)$ und meinen damit die Fundamentalgruppe in einem beliebigen $x_0 \in X$.

Lemma 7.9. Seien X und Y topologische Räume und sei $x_0 \in X$. Seien $f, g \in C^0(X, Y)$ homotop, H eine Homotopie von f nach g und sei $\gamma \in PY$, $\gamma(t) := H(x_0, t)$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ & \searrow g_* & \downarrow \ell_\gamma \\ & & \pi_1(Y, g(x_0)). \end{array}$$

Beweis. Sei $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ und definiere

$$h : [0, 1]^2 \rightarrow X, \quad h(s, t) = H(\alpha(s), t).$$

h ist offensichtlich stetig und nach Konstruktion ist

$$h(0, t) = H(x_0, t) = \gamma(t), \quad h(1, t) = H(\alpha(s), t) = \gamma(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

und

$$h(s, 0) = H(\alpha(s), 0) = (f \circ \alpha)(s), \quad h(s, 1) = H(\alpha(s), 1) = (g \circ \alpha)(s) \quad \forall s \in [0, 1].$$

Mit Aufgabe 3 von Übungsblatt 10 folgt, dass

$$(f \circ \alpha) * \gamma \simeq_w \gamma * (g \circ \alpha).$$

Mit den Resultaten aus Abschnitt 6.5 folgt daraus, dass

$$(\tilde{\gamma} * (f \circ \alpha)) * \gamma \simeq_w \tilde{\gamma} * ((f \circ \alpha) * \gamma) \simeq_w \tilde{\gamma} * (\gamma * (g \circ \alpha)) \simeq_w (\tilde{\gamma} * \gamma) * (g \circ \alpha) \simeq g \circ \alpha.$$

Also gilt für die entsprechenden Weghomotopieklassen, dass

$$g_*([\alpha]_w) = [g \circ \alpha]_w = [(\tilde{\gamma} * (f \circ \alpha)) * \gamma]_w = \ell_\gamma([f \circ \alpha]_w) = (\ell_\gamma \circ f_*)([\alpha]_w).$$

Genau das wollten wir zeigen. □

Satz 7.10. Seien X und Y topologische Räume und $x_0 \in X$. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, f(x_0))$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Nach Satz 7.3 ist f_* ein Gruppenhomomorphismus. Sei $g : Y \rightarrow X$ homotopieinvers zu f . (Man beachte hier, dass g_* im Allgemeinen keine Umkehrabbildung von f_* sein kann, da $g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$, so dass Definitions- und Wertebereich nicht übereinstimmen.) Da $g \circ f \simeq \text{id}_X$, gibt es nach Lemma 7.9 ein $\gamma \in PX$, so dass

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \ell_\gamma \circ (\text{id}_X)_* = \ell_\gamma. \quad (7.1)$$

Da ℓ_γ nach Satz 7.6 ein Isomorphismus ist, folgt insbesondere, dass

$$g_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$$

surjektiv ist. Völlig analog folgt aus $f \circ g \simeq \text{id}_Y$, dass

$$f_* \circ g_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, f(g(f(x_0))))$$

ein Isomorphismus und damit $g_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$. Folglich ist g_* ein Isomorphismus und aus (7.1) folgt, dass $f_* = g_*^{-1} \circ \ell_\gamma$ als Verkettung von Isomorphismen wieder ein Gruppenisomorphismus ist. $\square$

Die Fundamentalgruppe eines Produkts von topologischen Räumen lässt sich leicht über die Fundamentalgruppen der Faktoren berechnen.

Satz 7.11. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume, sei $x_i \in X_i$ für jedes $i \in I$ und setze $x := (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$. Dann gibt es einen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1\left(\prod_{i \in I} X_i, x\right) \cong \prod_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i),$$

wobei das Produkt auf der rechten Seite das direkte Produkt von Gruppen bezeichne.

Beweis. Setze $X := \prod_{i \in I} X_i$. Nach Konstruktion der Produkttopologie ist die Projektion $\text{pr}_i : X \rightarrow X_i$ für jedes $i \in I$ stetig, also ist $(\text{pr}_i)_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X_i, x_i)$ für jedes $i \in I$ ein Gruppenhomomorphismus. Definiere nun

$$P : \pi_1(X, x) \rightarrow \prod_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i), \quad P(\sigma) := ((\text{pr}_i)_*(\sigma))_{i \in I}.$$

Nach Definition des direkten Produkts ist P ein Gruppenhomomorphismus. Wählen $\alpha_i \in \Omega(X_i, x_i)$ für jedes $i \in I$, so ist $\alpha \in \Omega(X, x)$, wobei $\alpha(t) = (\alpha_i(t))_{i \in I}$ für alle $t \in [0, 1]$ und es folgt

$$P([\alpha]_w) = ((\text{pr}_i)_*([\alpha]_w))_{i \in I} = ([\alpha_i]_w)_{i \in I}.$$

Also ist P surjektiv. Bezeichnen wir das neutrale Element einer Gruppe G mit 1_G , so ist das neutrale Element des direkten Produkts gegeben durch

$$1_{\prod_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i)} = (1_{\pi_1(X_i, x_i)})_{i \in I} = ([c_{x_i}]_w)_{i \in I}.$$

Also gilt für $\alpha \in \Omega(X, x)$, dass

$$P([\alpha]_w) = 1_{\prod_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i)} \Leftrightarrow (\text{pr}_i)_*([\alpha]_w) = [c_{x_i}]_w \quad \forall i \in I \Leftrightarrow \text{pr}_i \circ \alpha \simeq_w c_{x_i} \quad \forall i \in I.$$

Wählen wir für jedes $i \in I$ eine Weghomotopie $H_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X_i$ von $\text{pr}_i \circ \alpha$ nach c_{x_i} , so folgt mit der Definition der Produkttopologie leicht, dass

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad H(s, t) = (H_i(s, t))_{i \in I}$$

eine Weghomotopie von α nach $(c_{x_i})_{i \in I} = c_x \in PX$ ist. Damit folgt $[\alpha]_w = [c_x]_w = 1_{\pi_1(X, x)}$, also $\ker P = \{1_{\pi_1(X, x)}\}$. Folglich ist P injektiv und damit ein Gruppenisomorphismus. $\square$

Im Laufe dieses Kapitels werden wir die Fundamentalgruppen wichtiger Beispiele explizit berechnen. An dieser Stelle wollen wir nur eine kleine Beobachtung ergänzen.

Satz 7.12. Sei G eine topologische Gruppe und $1 \in G$ ihr neutrales Element. Dann gilt:

- a) $\pi_1(G, g_1) \cong \pi_1(G, g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$.
- b) $\pi_1(G, 1)$ ist eine abelsche Gruppe.

Beweis. a) Seien $g_1, g_2 \in G$ und sei C_1 die Wegkomponente von g_1 und C_2 die Wegkomponente von g_2 . Man zeigt analog zu Satz 5.9, dass je zwei Wegkomponenten einer topologischen Gruppe homöomorph zueinander sind. Also folgt mit Satz 7.6 und Satz 7.10, dass

$$\pi_1(G, g_1) = \pi_1(C_1, g_1) \cong \pi_1(C_2, g_2) \cong \pi_1(G, g_2).$$

- b) Seien $\alpha, \beta \in \Omega(G, 1)$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass

$$[\alpha]_w \cdot [\beta]_w \stackrel{!}{=} [\beta]_w \cdot [\alpha]_w \quad \Leftrightarrow \quad \alpha * \beta \stackrel{!}{\simeq}_w \beta * \alpha.$$

Sei dazu $F : [0, 1]^2 \rightarrow G$, $F(s, t) = \alpha(s)\beta(t)$. Dann ist:

$$F(s, 0) = \alpha(s) \cdot 1 = \alpha(s) = F(s, 1), \quad F(0, t) = 1 \cdot \beta(t) = \beta(t) = F(1, t) \quad \forall s, t \in [0, 1].$$

Also folgt aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 10, dass $\alpha * \beta \simeq_w \beta * \alpha$.

□

7.2 Einfacher Zusammenhang und Homotopien von Schlingen

Wir nutzen nun die Fundamentalgruppe, um einen „strengeren“ Zusammenhangsbegriff einzuführen.

Definition 7.13. Ein topologischer Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn X wegzusammenhängend ist und

$$\pi_1(X, x_0) = \{1\}$$

für ein (und folglich jedes) $x_0 \in X$ erfüllt ist.

Bemerkung 7.14. Mit anderen Worten heißt ein wegzusammenhängender Raum einfach zusammenhängend, wenn jede Schleife in X weghomotop zu einer konstanten Schleife ist.

Wir werden in den nächsten Abschnitten Beispiele für Räume sehen, die einfach zusammenhängend sind, und solche, die es nicht sind. In diesem Abschnitt wollen wir zunächst den Begriff des einfachen Zusammenhangs genauer untersuchen und charakterisieren.

Satz 7.15. Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn je zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 \in PX$ mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ stets weghomotop sind.

Beweis. „ $\Leftarrow$ “: Sei $x_0 \in X$ beliebig und $\alpha \in \Omega(X, x_0)$. Definiere $\gamma_1, \gamma_2 \in PX$ durch

$$\gamma_1(t) = \alpha\left(\frac{t}{2}\right), \quad \gamma_2 = \alpha\left(1 - \frac{t}{2}\right) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt $\alpha = \gamma_1 * \bar{\gamma}_1$ und

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_0, \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = \alpha\left(\frac{1}{2}\right).$$

Nach Voraussetzung ist daher $\gamma_1 \simeq_w \gamma_2$. Mit Satz 6.31 und Satz 6.29.b) folgt daraus:

$$\alpha = \gamma_1 * \bar{\gamma}_1 \simeq_w \gamma_2 * \bar{\gamma}_1 \simeq_w c_{x_0}.$$

Also ist $[\alpha]_w = 1 \in \pi_1(X, x_0)$. Da x_0 und α beliebig gewählt waren, folgt $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ für alle $x_0 \in X$.

„ $\Rightarrow$ “: Seien $x_0, x_1 \in X$ und $\gamma_0, \gamma_1 \in P(X, x_0, x_1)$. Dann ist insbesondere $\gamma_0 * \bar{\gamma}_1 \in \Omega(X, x_0)$, also gilt nach Voraussetzung, dass $\gamma_0 * \bar{\gamma}_1 \simeq_w c_{x_0}$. Mit dieser Beobachtung und den Sätzen 6.29, 6.30.a) und 6.31 folgt:

$$\gamma_0 \simeq_w \gamma_0 * c_{x_1} \simeq_w \gamma_0 * (\bar{\gamma}_1 * \gamma_1) \simeq_w (\gamma_0 * \bar{\gamma}_1) * \gamma_1 \simeq_w c_{x_0} * \gamma_1 \simeq_w \gamma_1.$$

□

Ist α eine Schleife in einem Raum X , so folgt aus $\alpha(0) = \alpha(1)$, dass α eine stetige Abbildung von $[0, 1] / \sim$ nach X induziert, wobei $\sim$ durch $0 \sim 1$ definiert wird. Wir haben bereits in Beispiel 2.34.(1) gesehen, dass $S^1 \approx [0, 1] / \sim$, also können wir jeder Schleife eine stetige Abbildung $S^1 \rightarrow X$ zuordnen. Dies wollen wir im Folgenden etwas ausführen, da sich einfach zusammenhängende Räume durch solche Abbildungen charakterisieren lassen.

Definition 7.16. Sei X ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung $\alpha : S^1 \rightarrow X$ nennen wir *Schlinge in X* . Die Menge aller Schlingen in X bezeichnen wir mit

$$LX := C^0(S^1, X).$$

LX wird auch *freier Schleifenraum von X* genannt. (Der Buchstabe L kommt von der englischen Bezeichnung „loop space“.)

Bemerkung 7.17. Betrachten wir S^1 als Einheitskreis in $\mathbb{C}$, so erhalten wir eine Bijektion zwischen Schleifen in X und Schlingen in X durch

$$\Phi : LX \rightarrow \{\gamma \in PX \mid \gamma(0) = \gamma(1)\}, \quad (\Phi(f))(s) = f(e^{2\pi i s}) \quad \forall s \in [0, 1].$$

Für jedes $x_0 \in X$ lässt sich Φ zu einer Bijektion

$$\Phi_{x_0} : \{f \in LX \mid f(1) = x_0\} \rightarrow \Omega(X, x_0)$$

einschränken. (Übung.)

Im gesamten restlichen Abschnitt seien mit Φ und Φ_{x_0} stets die Abbildungen aus Bemerkung 7.17 bezeichnet.

Im folgenden Satz formulieren wir die Eigenschaft des einfachen Zusammenhangs durch Eigenschaften von Schlingen, welche sich für praktische Beispielen oft einfacher überprüfen lassen als die ursprüngliche Definition.

Satz 7.18. *Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) X ist einfach zusammenhängend.
- (ii) Jede Schlinge $f : S^1 \rightarrow X$ ist nullhomotop.
- (iii) Für jede Schlinge $f : S^1 \rightarrow X$ gibt es ein stetiges $F : D^2 \rightarrow X$ mit $F|_{S^1} = f$, wobei wir $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ betrachten.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Ist X einfach zusammenhängend und $f \in LX$, so ist insbesondere $\pi_1(X, f(1)) = \{1\}$, also ist $\Phi(f) \simeq_w c_{f(1)}$. Ist $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Homotopie von $\Phi(f)$ nach $c_{f(1)}$, so folgt leicht, dass eine wohldefinierte Homotopie von f zur konstanten Schlinge in $f(1)$ gegeben ist durch

$$h : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X, \quad h(e^{2\pi is}, t) = H(s, t).$$

Also ist f nullhomotop.

Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist ein Spezialfall von Aufgabe 2 von Übungsblatt 9.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ und sei $f := \Phi^{-1}(\alpha) \in LX$. Nach Voraussetzung gibt es ein stetiges $F : D^2 \rightarrow X$ mit $F|_{S^1} = f$. Aus der Analysis II wissen wir, dass D^2 eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, also ist die folgende Abbildung wohldefiniert:

$$H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X, \quad H(z, t) = F((1-t)z + t \cdot 1).$$

Da F stetig ist, ist H als Verkettung stetiger Abbildungen stetig. Weiter ist

$$H(z, 0) = F(z) = f(z), \quad H(z, 1) = F(1) = f(1) = x_0 \quad \forall z \in S^1,$$

also ist H eine Homotopie von f zur konstanten Schlinge in x_0 . Außerdem ist $H(1, t) = F(1) = x_0$ für alle $t \in [0, 1]$. Betrachten wir nun

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad h(s, t) = H(e^{2\pi is}, t),$$

so folgert man aus den Eigenschaften von H leicht, dass h eine Weghomotopie von α nach c_{x_0} ist. Insbesondere ist also $[\alpha]_w = 1$. Da α beliebig gewählt war, ist $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ und damit X einfach zusammenhängend. $\square$

Korollar 7.19. *Jeder zusammenziehbare topologische Raum ist einfach zusammenhängend.*

Beweis. Sei X ein zusammenziehbarer topologischer Raum. Dann gibt es nach Satz 6.13 ein $x_0 \in X$ und eine Homotopie $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ von id_X nach g_0 , wobei $g_0(x) = x_0$ für alle $x \in X$. Ist nun $f \in LX$, so ist

$$h : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X, \quad h(z, t) = H(f(z), t),$$

eine Homotopie von f nach f_0 , wobei $f_0(z) = x_0$ für alle $z \in S^1$. Also folgt die Behauptung aus Satz 7.18. $\square$

Beispiel 7.20. Insbesondere ist nach Korollar 7.19 jede sternförmige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und damit auch $\mathbb{R}^n$ selbst, einfach zusammenhängend, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Ist X wegzusammenhängend, so gilt nach Satz 7.18, dass $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ genau dann, wenn $[S^1, X]$ aus genau einem Element besteht. Wir wollen nun eine allgemeinere Beziehung zwischen diesen beiden Mengen herstellen.

Zunächst stellen wir fest, dass wir im Allgemeinen keine Gruppenstruktur auf $[S^1, X]$ definieren können. Würden wir für zwei Schlingen f und g mit $f(1) \neq g(1)$ die zugehörigen Schleifen konkatenieren, so ist das Resultat notwendigerweise unstetig, also insbesondere keine Schleife in X . Folglich lässt sich die Gruppenstruktur von $\pi_1(X, x_0)$ nicht auf $[S^1, X]$ übertragen.

Seien ein wegzusammenhängendes X und $x_0 \in X$ fest gewählt. Ist $j : \{\alpha \in LX \mid \alpha(1) = x_0\} \rightarrow LX$ die Inklusion, so erhalten wir eine Abbildung

$$i := j \circ \Phi_{x_0}^{-1} : \Omega(X, x_0) \rightarrow LX.$$

Man rechnet leicht nach, dass für $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ gilt, dass

$$\alpha \simeq_w \beta \iff i(\alpha) \simeq_{\{1\}} i(\beta),$$

wobei $\simeq_{\{1\}}$ Homotopie relativ zu $\{1\}$ bezeichne. Da relativ homotope Abbildungen insbesondere homotop sind, erhalten wir damit insbesondere, dass

$$\alpha \simeq_w \beta \implies i(\alpha) \simeq i(\beta).$$

Also induziert i eine wohldefinierte Abbildung

$$\Psi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [S^1, X] = LX / \simeq, \quad \Psi([\alpha]_w) = [\Phi^{-1}(\alpha)]. \quad (7.2)$$

Mit Hilfe von Ψ stellen wir nun die Verbindung zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $[S^1, X]$ her.

Satz 7.21. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $x_0 \in X$. Sei die Abbildung $\Psi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [S^1, X]$ gegeben wie in (7.2). Dann gilt:

- a) Ψ ist surjektiv.
- b) Es ist $\Psi(\sigma_1) = \Psi(\sigma_2)$ für $\sigma_1, \sigma_2 \in \pi_1(X, x_0)$ genau dann, wenn σ_1 und σ_2 konjugiert zueinander sind.

Beweis. a) Sei $f \in LX$ und setze $x_1 := f(1)$, $\alpha := \Phi(f) \in \Omega(X, x_1)$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es ein $\gamma \in P(X, x_0, x_1)$. Setze dann

$$\beta := (\gamma * \alpha) * \bar{\gamma} \in \Omega(X, x_0).$$

Wir wollen zeigen, dass α und β homotop sind (jedoch nicht weghomotop!) und die Homotopie anschließend auf die zugehörigen Schlingen übertragen. Definiere dafür $\gamma_t \in PX$ für jedes $t \in [0, 1]$ durch $\gamma_t(s) := \gamma(t + (1-t)s)$. Dann ist $\gamma_t \in P(X, \gamma(t), x_1)$ für alle $t \in [0, 1]$, sowie $\gamma_0 = \gamma$ und $\gamma_1 = c_{x_1}$. Betrachten wir

$$H_1 : [0, 1] \times [0, 1], \quad H(s, t) = ((\gamma_t * \alpha) * \bar{\gamma}_t)(s),$$

so rechnet man nach (Übung), dass H_1 stetig ist. Nach Konstruktion ist H_1 eine Homotopie von β nach $(c_{x_1} * \alpha) * c_{x_1}$. Weiterhin gilt

$$H_1(0, t) = \gamma_t(0) = H_1(1, t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

also ist $H_1(\cdot, t) : [0, 1] \rightarrow X$ eine Schleife für jedes $t \in [0, 1]$.

Nach Satz 6.29 gibt es eine Weghomotopie $H_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ von $(c_{x_1} * \alpha) * c_{x_1}$ nach α . Definieren wir nun $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$, $H := H_1 \# H_2$, wie in Satz/Definition 6.4.b), so ist H eine Homotopie von β nach α und man rechnet leicht nach, dass $H(0, t) = H(1, t)$ für alle $t \in [0, 1]$. also folgt insbesondere, dass $\alpha \simeq \beta$. Setzen wir $g := \Phi^{-1}(\alpha) \in LX$, so folgt daraus, dass wir eine wohldefinierte Homotopie von f nach g erhalten durch

$$F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X, \quad F(e^{2\pi is}, t) = H(s, t).$$

Folglich ist $[f] = [g] \in [S^1, X]$ und damit $\Psi([f]) = [g]$. Also ist Ψ surjektiv.

b) „ $\Leftarrow$ “: Seien $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$, so dass $[\alpha]_w, [\beta]_w \in \pi_1(X, x_0)$ konjugiert zueinander sind. Es gibt also ein $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, so dass

$$(\gamma * \alpha) * \bar{\gamma} \simeq_w \beta.$$

Völlig analog zu Teil a) zeigt man, dass eine Homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ von α nach β existiert, für die gilt, dass $H(0, t) = H(1, t)$ für alle $t \in [0, 1]$. Wieder analog zu a) folgt daraus, dass $\Phi^{-1}(\alpha) \simeq \Phi^{-1}(\beta)$, also ist

$$\psi([\alpha]_w) = [\Phi^{-1}(\alpha)] = [\Phi^{-1}(\beta)] = \psi([\beta]_w).$$

„ $\Rightarrow$ “: Seien $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$, so dass $\Psi([\alpha]_w) = \Psi([\beta]_w)$. Sind $f, g \in LX$ gegeben durch $f := \Phi^{-1}(\alpha)$, $g := \Phi^{-1}(\beta)$, so sind folglich f und g homotop. Ist $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Homotopie von f nach g , so erhalten wir folglich eine stetige Abbildung

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad h(s, t) = H(e^{2\pi is}, t).$$

Definieren wir $\gamma \in PX$ durch $\gamma(t) := h(0, t)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} h(0, t) &= h(1, t) = \gamma(t) \quad \forall t \in [0, 1], \\ h(s, 0) &= f(e^{2\pi is}) = \alpha(s), \quad h(s, 1) = g(e^{2\pi is}) = \beta(s) \quad \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\gamma(0) = \alpha(0) = x_0$ und $\gamma(1) = \beta(0) = x_0$, also $\gamma \in \Omega(X, x_0)$. Wenden wir nun Aufgabe 3 von Übungsblatt 10 auf h an, so folgt

$$\alpha * \gamma \simeq_w \gamma * \beta,$$

womit wir mit den Ergebnissen aus Abschnitt 6.5 erhalten, dass

$$(\gamma * \beta) * \bar{\gamma} = (\alpha * \gamma) * \bar{\gamma} \simeq_w \alpha * (\gamma * \bar{\gamma}) \simeq_w \alpha.$$

Also ist $[\gamma]_w \cdot [\beta]_w \cdot [\gamma]_w^{-1} = [\alpha]_w \in \pi_1(X, x_0)$, so dass $[\alpha]_w$ und $[\beta]_w$ konjugiert sind. $\square$

Mit dem letzten Satz erhalten wir nun eine algebraische Beschreibung von $[S^1, X]$.

Korollar 7.22. *Ist X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $x_0 \in X$, so gibt es eine Bijektion zwischen $[S^1, X]$ und der Menge der Konjugationsklassen von $\pi_1(X, x_0)$.*

Bemerkung 7.23. Wir können Korollar 7.22 als Verallgemeinerung der Äquivalenz von (i) und (ii) in Satz 7.18 betrachten, da wir aus Algebra 1 wissen, dass eine Gruppe genau dann eine einzige Konjugationsklasse besitzt, wenn sie selbst trivial ist.

7.3 Die Fundamentalgruppe von S^1

In diesem Abschnitt wollen wir die Fundamentalgruppe von S^1 explizit berechnen. Bevor es „ans Eingemachte“ geht, wollen wir ein nützliches Lemma besprechen, das wir im Folgenden mehrfach anwenden werden.

Satz 7.24 (Lebeguesches Überdeckungslemma). *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Dann gibt es ein $r > 0$, so dass es zu jedem $x \in X$ ein $i \in I$ gibt mit $B_r(x) \subset U_i$.*

Beweis. Für jedes $x \in X$ gibt es ein $i(x) \in I$ mit $x \in U_{i(x)}$. Da $U_{i(x)}$ offen ist, gibt es ein $r(x) > 0$, so dass $B_{r(x)}(x) \subset U_{i(x)}$. Dann ist durch $\{B_{r(x)}(x) \mid x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X gegeben und da X kompakt ist, gibt es $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$, so dass $X = \bigcup_{k=1}^n B_{r(x_k)}(x_k)$. Setze

$$r := \min\{r(x_1), \dots, r(x_n)\} > 0.$$

Ist $y \in X$ beliebig, so gibt es dann ein $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $y \in B_{r(x_k)}(x_k)$. Ist nun $z \in B_r(y)$ beliebig, so folgt mit der Dreiecksungleichung, dass

$$d(z, x_k) \leq d(z, y) + d(y, x_k) < r + r(x_k) \leq 2r(x_k).$$

Also ist $B_r(y) \subset B_{2r(x_k)}(x_k) \subset U_{i(x_k)}$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Weiterhin legen wir für die Dauer dieses Abschnitts die folgende Notation fest:

Definition 7.25. Wir betrachten wieder $S^1 \subset \mathbb{C}$ und die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad \varphi(s) = e^{2\pi i s}.$$

Ist X ein topologischer Raum und $f : X \rightarrow S^1$ stetig, so heißt ein stetiges $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine *Hochhebung* von f , falls $\varphi \circ \tilde{f} = f$.

Beispiel 7.26. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $f_k : [0, 1] \rightarrow S^1, f(s) = e^{2\pi i k s}$. Dann sieht man direkt, dass $\tilde{f}_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f}_k(s) = ks$, eine Hochhebung von f_k ist.

Den folgenden Satz werden wir im nächsten Kapitel auf deutlich allgemeinere Abbildungen als φ verallgemeinern.

Satz 7.27 (Hochhebungssatz für Wege in S^1). Sei $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ stetig und sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = f(0)$. Dann gibt es eine eindeutige Hochhebung $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ von f mit $\tilde{f}(0) = x_0$.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \varphi \\ [0, 1] & \xrightarrow{f} & S^1. \end{array}$$

Beweis. Sei $z \in S^1, U_z := S^1 \setminus \{z\}$ und sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = -z$. Aus der Analysis II wissen wir, dass $\varphi_x := \varphi|_{(x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2})} : (x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}) \rightarrow U_z$ bijektiv ist. Weiter ist φ_x stetig und offen und damit nach Satz 2.5 ein Homöomorphismus.

Wir erhalten eine offene Überdeckung von S^1 durch $\{U_1, U_{-1}\}$. Folglich ist

$$\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_{-1})\}$$

eine offene Überdeckung von $[0, 1]$ und nach dem Lebesgueschen Überdeckungslemma finden wir ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : \quad f\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subset U_1 \quad \vee \quad f\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subset U_{-1}.$$

Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = f(0)$. Wir definieren $\tilde{f}$ nun abschnittsweise:

- Nach Annahme gibt es ein $y_0 \in \mathbb{R}$, so dass $x_0 \in (y_0 - \frac{1}{2}, y_0 + \frac{1}{2})$, $\varphi(y_0) \in \{-1, 1\}$ und $f([0, \frac{1}{n}]) \subset U_{\varphi(y_0)}$. Folglich ist die Abbildung

$$\tilde{f}_0 : [0, \frac{1}{n}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}_0(s) = \varphi_{y_0}^{-1}(f(s)),$$

wohldefiniert und stetig mit $\tilde{f}_0(0) = x_0$.

- Ist ein stetiges $\tilde{f}_{i-1} : [0, \frac{i}{n}] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}_{i-1}(0) = x_0$ und $(\varphi \circ \tilde{f}_{i-1})(s) = f(s)$ für alle $s \in [0, \frac{i}{n}]$ gegeben, so setze $x_i := \tilde{f}_{i-1}(\frac{i}{n})$. Analog zum ersten Schritt gibt es dann

ein $y_i \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(y_i) \in \{1, -1\}$, $x_i \in (y_i - \frac{1}{2}, y_i + \frac{1}{2})$, so dass $f([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subset U_{\varphi(y_i)}$. Definieren wir dann

$$\tilde{f}_i : [0, \frac{i+1}{n}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}_i(s) := \begin{cases} \tilde{f}_{i-1}(s) & \text{falls } s \in [0, \frac{i}{n}], \\ \varphi_{y_i}^{-1}(f(s)) & \text{falls } s \in (\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}], \end{cases}$$

so überprüft man leicht, dass $\tilde{f}_i$ stetig ist und dass $(\varphi \circ \tilde{f}_i)(s) = f(s)$ für alle $s \in [0, \frac{i+1}{n}]$.

Die Abbildung $\tilde{f} := \tilde{f}_{n-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die wir auf diese Weise erhalten, ist dann eine Hochhebung von f .

Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ Hochhebungen von f mit $\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_2(0) = x_0$. Da $\varphi(\tilde{f}_1(s)) = f(s) = \varphi(\tilde{f}_2(s))$ für alle $s \in [0, 1]$, muss nach Definition von φ gelten, dass

$$\tilde{f}_2(s) - \tilde{f}_1(s) \in \mathbb{Z} \quad \forall s \in [0, 1].$$

Da $\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1$ stetig ist, ist folglich $\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1$ konstant. Da jedoch $\tilde{f}_2(0) = \tilde{f}_1(0)$, folgt $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$. $\square$

Ist nun $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ stetig mit $f(0) = f(1)$ und $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hochhebung von f , so gilt, dass $\varphi(\tilde{f}(1)) = \varphi(\tilde{f}(0))$. Nach Definition von φ folgt daraus, dass

$$\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) \in \mathbb{Z}.$$

Definition 7.28. Sei $x_0 \in S^1$ beliebig. Definiere

$$\deg : \Omega(S^1, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \deg \alpha = \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0),$$

wobei $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hochhebung von α sei. Da zwei Hochhebungen von α sich nur um eine Konstante unterscheiden können, ist $\deg \alpha$ unabhängig von der Wahl der Hochhebung und damit wohldefiniert. Die Zahl $\deg \alpha$ heißt *Grad* oder *Abbildungsgrad* von α .

Beispiel 7.29. Wie man aus Beispiel 7.26 leicht folgert, gilt für $f_k(s) = e^{2\pi i k s}$, dass

$$\deg(f_k) = k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Satz 7.30 (Hochhebungssatz für Homotopien in S^1). Sei $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ stetig und $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ eine Homotopie mit $H(s, 0) = f(s)$ für alle $s \in [0, 1]$. Ist $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hochhebung von f , so gibt es eine Hochhebung $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ von H mit $\tilde{H}(s, 0) = \tilde{f}(s)$ für alle $s \in [0, 1]$. Mit anderen Worten kommutiert folgendes Diagramm mit $i_0 : [0, 1] \hookrightarrow [0, 1]^2$, $i_0(s) = (s, 0)$:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ i_0 \downarrow & \tilde{H} \nearrow & \downarrow \varphi \\ [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & S^1 \end{array}$$

Beweisskizze. (Wir werden im nächsten Kapitel einen allgemeineren Satz detaillierter beweisen, der Satz 7.30 zur Konsequenz hat.)

Wir übernehmen die Notation aus dem Beweis von Satz 7.27. Analog zur Situation dort, können wir aus dem Lebesgueschen Überdeckungssatz folgern, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\forall i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\} : \quad H(V_{i,j}) \subset U_1 \quad \vee \quad H(V_{i,j}) \subset U_{-1},$$

wobei $V_{i,j} := [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}] \subset [0, 1]^2$. Wir erhalten nun eine Hochhebung von H durch folgendes induktive Verfahren:

- Definiere $\tilde{H}_{1,1} : V_{1,1} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\tilde{H}_{1,1}(s, t) = \varphi_{y_0}^{-1}(H(s, t))$ für geeignetes $y_0 \in \mathbb{R}$.
- Ist $\tilde{H}_{i,j} : V_{i,j} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so definiere analog zum Beweis von Satz 7.27 eine stetige Fortsetzung auf $V_{i,j} \cup V_{i+1,j} \cup V_{i,j+1}$ durch Anwendung geeigneter Abbildungen der Form φ_y^{-1} auf H .
- Füge die $\tilde{H}_{i,j}$ zu einer stetigen Abbildung auf $[0, 1]^2$ zusammen.

□

Wir wollen nun diese Hochhebungseigenschaft nutzen, um die Fundamentalgruppe von S^1 mit Hilfe der Grade von Schleifen zu bestimmen. Im nächsten Satz bringen wir dafür zunächst Grade und Weghomotopien zusammen.

Satz 7.31. Für $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1)$ ist $\deg \alpha = \deg \beta$ genau dann, wenn $\alpha \simeq_w \beta$.

Beweis. „ $\Leftarrow$ “: Sei H eine Weghomotopie von α nach β . Nach Satz 7.27 besitzt α eine Hochhebung $\tilde{\alpha}$ mit $\tilde{\alpha}(0) = 1$. Nach Satz 7.30 besitzt H eine Hochhebung $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{H}(s, 0) = \tilde{\alpha}(s)$ für alle $s \in [0, 1]$. Dann gilt insbesondere für $\tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\beta}(s) := H(s, 1)$, dass

$$(\varphi \circ \tilde{\beta})(s) = (\varphi \circ \tilde{H})(s, 1) = H(s, 1) = \beta(s) \quad \forall s \in [0, 1],$$

also ist $\tilde{\beta}$ eine Hochhebung von β . Da H eine Weghomotopie ist, gilt weiterhin

$$(\varphi \circ \tilde{H})(0, t) = H(0, t) = 1 = H(1, t) = (\varphi \circ \tilde{H})(1, t) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Also ist $\gamma(t) := \tilde{H}(1, t) - \tilde{H}(0, t) \in \mathbb{Z}$ für alle $t \in [0, 1]$. Da aber $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ wegen der Stetigkeit von $\tilde{H}$ stetig ist, ist γ konstant, also gilt insbesondere

$$\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) = \gamma(0) = \gamma(1) = \tilde{\beta}(1) - \tilde{\beta}(0)$$

und damit $\deg \alpha = \deg \beta$.

„ $\Rightarrow$ “: Seien $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1)$ mit $\deg \alpha = \deg \beta = k$. Seien $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Hochhebungen von α bzw. β mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. (Diese existieren nach Satz 7.27.) Da $\deg \alpha = \deg \beta$, folgt daraus, dass

$$\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1),$$

beide Wege haben also dieselben Endpunkte. Da $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist, folgt aus Satz 7.15, dass es eine Weghomotopie $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ von $\tilde{\alpha}$ nach $\tilde{\beta}$ gibt. Definieren wir

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1, \quad H := \varphi \circ \tilde{H},$$

so gilt nach Definition einer Hochhebung, dass $H(s, 0) = \alpha(s)$ und $H(s, 1) = \beta(s)$ für alle $s \in [0, 1]$. Da $\tilde{H}$ eine Weghomotopie ist, folgt leicht, dass H eine Weghomotopie von α nach β ist. Also ist $\alpha \simeq_w \beta$. $\square$

Satz 7.32. Die Abbildung $d : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$, $d([\alpha]_w) = \deg \alpha$, ist ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Nach Satz 7.31 ist d wohldefiniert. Nach Beispiel 7.29 gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$ für $f_k : [0, 1] \rightarrow S^1$, $f_k(s) = e^{2\pi i k s}$, dass $\deg(f_k) = k$, also $d([f_k]_w) = k$, so dass d surjektiv ist. Um zu zeigen, dass d ein Gruppenhomomorphismus ist, müssen wir zeigen, dass

$$\deg(\alpha * \beta) \stackrel{!}{=} \deg \alpha + \deg \beta \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1).$$

Seien α und β fest gewählt und sei $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hochhebung von α . Da $\varphi(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = x_0 = \beta(0)$, besitzt β nach Satz 7.27 eine Hochhebung $\tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\beta}(0) = \tilde{\alpha}(1)$. Nach Satz 6.30.b) ist dann

$$\varphi \circ (\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}) = (\varphi \circ \tilde{\alpha}) * (\varphi \circ \tilde{\beta}) = \alpha * \beta.$$

Also ist $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ eine Hochhebung von $\alpha * \beta$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \deg(\alpha * \beta) &= (\tilde{\alpha} * \tilde{\beta})(1) - (\tilde{\alpha} * \tilde{\beta})(0) = \tilde{\beta}(1) - \tilde{\alpha}(0) \\ &= \tilde{\beta}(1) - \tilde{\beta}(0) + \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) = \deg \alpha + \deg \beta. \end{aligned}$$

Also ist d ein Gruppenhomomorphismus. Um zu zeigen, dass d ein Gruppenisomorphismus ist, bleibt daher nur noch zu zeigen, dass $\ker d = \{1_{\pi_1(S^1, 1)}\}$.

Ist $\alpha \in \Omega(S^1, 1)$ mit $d([\alpha]_w) = 0$, also $\deg \alpha = 0$, so besitzt α folglich eine Hochhebung $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\alpha}(1) =: x_0$. Da $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Weghomotopie $\tilde{H}$ von $\tilde{\alpha}$ nach c_{x_0} . Dann ist jedoch $H := \varphi \circ \tilde{H}$ eine Weghomotopie von α nach c_1 , also $[\alpha]_w = [c_1] = 1_{\pi_1(S^1, 1)}$. Also ist d auch injektiv und damit ein Isomorphismus. $\square$

Bemerkung 7.33. Wir erhalten also, dass $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ und dass ein Erzeuger von $\pi_1(S^1, 1)$ als zyklische Gruppe gegeben ist durch $[f_1]_w$ mit $f_1 : [0, 1] \rightarrow S^1$, $f_1(s) = e^{2\pi i s}$.

Korollar 7.34. S^1 ist nicht zusammenziehbar.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 7.32 und Korollar 7.19. $\square$

Korollar 7.35. Für jedes $z_0 \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $\pi_1(\mathbb{C}^*, z_0) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Nach Beispiel 6.12.(2) ist $r : \mathbb{C}^* \simeq S^1$, $r(z) = \frac{z}{|z|}$, eine Deformationsretraktion. Nach Satz 7.10 ist dann $r_* : \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0) \rightarrow \pi_1(S^1, r(z_0))$ ein Isomorphismus. Da S^1 wegzusammenhängend ist, ist $\pi_1(S^1, r(z_0)) \cong \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

Bemerkung 7.36. Insbesondere ist $\nu := d \circ r_* : \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus. In der Funktionentheorie taucht dieser Isomorphismus in Form der Umlaufszahl auf. Einer Schleife in $\mathbb{C}^*$ wird hierbei eine Zahl zugeordnet, die die Anzahl der Umläufe der Schleife um den Punkt 0 misst, wobei das Vorzeichen für die Umlaufrichtung steht. Die Umlaufszahl einer Schleife $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist hierbei gerade $\nu([\gamma]_w)$. In der Funktionentheorie wird weiter gezeigt, dass die Umlaufszahl sich für stückweise differenzierbares γ explizit als Wert des Kurvenintegrals $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} dz$ berechnen lässt.

7.4 Die Fundamentalgruppe von S^n für $n > 1$

Für $n > 1$ lässt sich die Fundamentalgruppe von S^n deutlich leichter bestimmen als die von S^1 . Folgende Aussage, die sich später auch als Spezialfalls des Satzes von Seifert-van Kampen herleiten lässt, ist dabei hilfreich.

Satz 7.37. Sei X ein topologischer Raum und seien $U, V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V \neq \emptyset$. Wenn gilt:

- U und V sind einfach zusammenhängend,
- $U \cap V$ ist wegzusammenhängend,

dann ist X einfach zusammenhängend.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, dass X wegzusammenhängend ist. Sei $x_0 \in U \cap V$ und $\alpha \in \Omega(X, x_0)$. Nach dem Lebesgueschen Überdeckungslemma gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\alpha([\frac{i-1}{n}, \frac{i+1}{n}])$ vollständig in U oder vollständig in V enthalten ist für jedes $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Für jedes $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ setze

$$\alpha_j : [0, 1] \rightarrow X, \quad \alpha_j(s) := \alpha\left(\frac{j-1+s}{n}\right),$$

so dass also $\alpha_j([0, 1]) = \alpha([\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}])$. Man überlegt sich leicht (Übung), dass

$$\alpha \simeq_w (\dots ((\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3) * \dots) * \alpha_n.$$

Wähle für jedes $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ein $\gamma_i \in P(X, x_0, \alpha(\frac{i}{n}))$, so dass

- $\gamma_i([0, 1]) \subset U$ falls $\alpha([\frac{i-1}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subset U$,
- $\gamma_i([0, 1]) \subset V$ falls $\alpha([\frac{i-1}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subset V$.

Die Existenz solcher γ_i folgt, da U, V und $U \cap V$ nach Annahme wegzusammenhängend sind. Setze dann

$$\beta_1 := \alpha_1 * \bar{\gamma}_1, \quad \beta_i := (\gamma_{i-1} * \alpha_i) * \bar{\gamma}_i \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n-1\}, \quad \beta_n := \gamma_{n-1} * \alpha_n.$$

Nach Konstruktion gilt dann $\beta_i \in \Omega(U, x_0)$ oder $\beta_i \in \Omega(V, x_0)$, so dass aus den Voraussetzungen folgt, dass $\beta_i \simeq_w c_{x_0}$ für jedes $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Im Folgenden lassen wir die Klammerung bei der Konkatenation weg, da die Weghomotopieklasse nach Satz 6.30 unabhängig von der Konkatenationsreihenfolge ist. Damit und mit den Rechenregeln für Weghomotopien aus Abschnitt 6.5 erhalten wir:

$$\begin{aligned} \alpha &\simeq_w \alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3 * \dots * \alpha_n = \simeq_w \alpha_1 * \bar{\gamma}_1 * \gamma_1 * \alpha_2 * \bar{\gamma}_2 * \gamma_2 * \alpha_3 * \bar{\gamma}_3 * \dots * \gamma_n * \alpha_n \\ &\simeq_w \beta_1 * \beta_2 * \dots * \beta_n \\ &\simeq_w c_{x_0} * c_{x_0} * \dots * c_{x_0} = c_{x_0}. \end{aligned}$$

Also ist $\alpha \simeq_w c_{x_0}$ und da $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ beliebig gewählt war, ist X einfach zusammenhängend. $\square$

Lemma 7.38. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $p \in S^n$ ist $S^n \setminus \{p\} \approx \mathbb{R}^n$

Beweis. Sei $N := (0, \dots, 0, 1) \in S^n$. Für jedes $p \in S^n$ gibt es ein $A_p \in O(n+1)$ mit $A_p(N) = p$ und man überlegt sich daraus, dass A_p einen Homöomorphismus $S^n \setminus \{N\} \approx S^n \setminus \{p\}$ induziert, es reicht also, den Fall $p = N$ zu betrachten. Man rechnet dann nach (Übung), dass die *stereographische Projektion*

$$\phi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n),$$

ein Homöomorphismus ist, deren Umkehrabbildung durch

$$\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}, \quad \psi(x) = \frac{1}{\|x\|^2 + 1}(2x, \|x\|^2 - 1),$$

gegeben ist. $\square$

Korollar 7.39. Für jedes $n > 1$ ist S^n einfach zusammenhängend.

Beweis. Sei $n > 1$ fest gewählt, sei $N := (0, 0, \dots, 1) \in S^n$ und seien $U := S^n \setminus \{N\}$, $V := S^n \setminus \{-N\}$. Nach Lemma 7.38 sind U und V einfach zusammenhängend. Für $U \cap V = S^n \setminus \{N, -N\}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f : S^n \setminus \{N, -N\} &\rightarrow S^{n-1} \times (-1, 1), \\ f(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \left(\frac{x_1}{\|(x_1, \dots, x_n)\|}, \dots, \frac{x_n}{\|(x_1, \dots, x_n)\|}, x_{n+1} \right), \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus (Übung). Da $n > 1$, ist $U \cap V$ folglich insbesondere wegzusammenhängend und die Behauptung folgt direkt aus Satz 7.37. $\square$

7.5 Anwendungen der Fundamentalgruppe

In diesem Abschnitt wollen wir die bisherigen Resultate, insbesondere die Berechnungen für die Fundamentalgruppen von Sphären zusammenführen, um mit ihnen geometrische Aussagen zu beweisen. Als ersten ziehen wir zwei einfache Folgerungen.

Korollar 7.40. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in T^n$ ist $\pi_1(T^n, x_0) \cong \mathbb{Z}^n$.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 7.32 und Satz 7.11. □

Damit können wir nun endlich eine Frage beantworten, die wir uns in Abschnitt 6.1 gestellt haben, um eine Motivation für die Einführung der Fundamentalgruppe zu bekommen.

Korollar 7.41. *Für $n > 1$ sind S^n und T^n nicht homotopieäquivalent, also insbesondere nicht homöomorph.*

Beweis. Nach Korollar 7.39 ist $\pi_1(S^n, x_0) \cong \{1\}$. Nach Korollar 7.40 ist $\pi_1(T^n, x_0) \cong \mathbb{Z}^n$. Also folgt die Behauptung aus Satz 7.10. □

Insbesondere haben wir nun also gelernt, wie in Abschnitt 6.1 angekündigt, S^2 von einem 2-Torus zu unterscheiden. Mit Hilfe der Fundamentalgruppe können wir weiterhin neue Aussagen über die topologischen Beziehungen zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^n$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ machen, die wir als Erweiterung von Satz 6.1 auffassen können.

Satz 7.42. $\mathbb{R}^2$ ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 2$.

Beweis. Den Fall $n = 1$ haben wir in Satz 6.1 bereits bewiesen, sei also $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$. Falls es einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ gäbe, von dem wir o.B.d.A. annehmen können, dass $f(0) = 0$, so ließe sich dieser einschränken auf einen Homöomorphismus

$$f_0 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Nach Satz 7.10 wäre $(f_0)_* : \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, f(x_0))$ dann ein Isomorphismus, es gilt jedoch nach Beispiel 6.12.(2), Satz 7.32 und Korollar 7.39, dass

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x_0) \cong \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, f(x_0)) \cong \pi_1(S^{n-1}, p) = \{1\}.$$

Also kann es keinen solchen Homöomorphismus geben. □

Als Nächstes wollen wir die uns bisher bekannten Fundamentalgruppen nutzen, um einen klassischen Fixpunktsatz zu beweisen.

Satz 7.43 (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung $f : D^2 \rightarrow D^2$ besitzt einen Fixpunkt, also ein $x \in D^2$ mit $f(x) = x$.*

Beweis. Angenommen, es gebe $f : D^2 \rightarrow D^2$ stetig, so dass $f(x) \neq x$ für alle $x \in D^2$. Dann ist die folgende Abbildung $r : D^2 \rightarrow S^1$ wohldefiniert: für jedes $x \in D^2$ betrachte die eindeutige Halbgerade (Strahl) mit Ursprung $f(x)$, die durch x verläuft. $r(x)$ sei dann der eindeutige Schnittpunkt dieser Halbgeraden mit S^1 .

Man überzeugt sich leicht davon, dass r stetig ist. Nach Konstruktion ist weiterhin $r(x) = x$ für alle $x \in S^1$. Also ist r eine Retraktion. Insbesondere ist $r \circ i = \text{id}_{S^1}$, wobei $i : S^1 \hookrightarrow D^2$ die Inklusion bezeichne. Dann gilt jedoch für die induzierten Homomorphismen auf den Fundamentalgruppen für jedes $z_0 \in S^1$, dass

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (\text{id}_{S^1})_* = \text{id}_{\pi_1(S^1, z_0)}.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch, da D^2 einfach zusammenhängend ist und deshalb das Bild von $r_* : \pi_1(D^2, z_0) \rightarrow \pi_1(S^1, z_0)$ nur ein Element enthalten kann. Also kann es kein solches f geben. $\square$

Mit Hilfe der Fundamentalgruppe können wir außerdem einen neuen Beweis eines alten Bekannten finden, den wir zunächst mit einem Lemma über das Verhältnis zwischen Schleifen und Schlingen in S^1 vorbereiten.

Lemma 7.44. *Ein stetiges $f : S^1 \rightarrow S^1$ ist genau dann nullhomotop, wenn $[\Phi(f)]_w = 0$.*

Beweis. Ist f nicht nullhomotop, so folgt aus Korollar 7.22, dass $[\Phi(f)]_w \neq 0$.

Sei f nullhomotop mit $f(1) =: z_0$. Da $\pi_1(S^1, z_0)$ abelsch ist, besteht jede Konjugationsklasse von $\pi_1(S^1, z_0)$ aus genau einem Element. Also erhalten wir nach Korollar 7.22 eine Bijektion $\Psi : \pi_1(S^1, z_0) \rightarrow [S^1, S^1]$ und aus der Konstruktion geht hervor, dass $\Psi^{-1}([f]) = \Psi^{-1}(0) = 0$. Da aber nach Konstruktion $\Psi^{-1}([f]) = [\Phi(f)]_w$, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 7.45 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes Polynom $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, wobei $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, vom Grad $n > 0$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $a_n = 1$. Angenommen, p habe keine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Dann ist

$$F : S^1 \times (0, 1] \rightarrow S^1, \quad F(z, t) = \frac{p((1-t)z/t)}{|p((1-t)z/t)|} = \frac{t^n p((1-t)z/t)}{|t^n p((1-t)z/t)|},$$

wohldefiniert und stetig. Wir berechnen, dass

$$t^n p((1-t)z/t) = t^n a_0 + a_1 t^{n-1} (1-t)z + \dots + a_{n-1} t (1-t)^{n-1} z^{n-1} + (1-t)^n z^n,$$

woraus folgt, dass sich F stetig auf $S^1 \times [0, 1]$ fortsetzen lässt als

$$\tilde{F} : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1, \quad \tilde{F}(z, t) = \begin{cases} F(z, t) & \text{falls } t > 0, \\ z^n & \text{falls } t = 0. \end{cases}$$

Damit ist $\tilde{F}$ eine Homotopie zwischen $f_0, f_1 : S^1 \rightarrow S^1$, wobei

$$f_0(z) = z^n, \quad f_1(z) = \frac{p(0)}{|p(0)|} \quad \forall z \in S^1.$$

Insbesondere ist f_0 nullhomotop, so dass mit Lemma 7.44 folgt, dass $[\Phi(f_0)]_w = 0$ und damit $\deg(\Phi(f_0)) = 0$ nach Satz 7.31. Dies ist jedoch ein Widerspruch, da $(\Phi(f_0))(s) = e^{2\pi i n s}$ und wir in Beispiel 7.29 gesehen haben, dass $\deg(\Phi(f_0)) = n \neq 0$. Also kann es kein solches p geben. $\square$

Nun kommen wir zum Satz von Borsuk-Ulam, der vielfältigste Anwendungen in Topologie und Kombinatorik besitzt. Erneut brauchen wir zunächst ein vorbereitendes Lemma. Sei im Folgenden wieder $\Phi : LX \rightarrow \{\alpha \in PX \mid \alpha(0) = \alpha(1)\}$ die Bijektion zwischen Schleifen und Schlingen aus Abschnitt 7.2.

Lemma 7.46. *Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig, so dass $f(-z) = -f(z)$ für alle $z \in S^1$. Dann ist $\deg(\Phi(f))$ ungerade.*

Beweis. Sei $z_0 := f(1)$ und setze $\alpha := \Phi(f) \in \Omega(S^1, z_0)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(-z) = -f(z) \quad \forall z \in S^1 &\Leftrightarrow f(e^{\pi i} e^{2\pi i s}) = -f(e^{2\pi i s}) \quad \forall s \in [0, 1] \\ &\Leftrightarrow f(e^{2\pi i(s+\frac{1}{2})}) = -f(e^{2\pi i s}) \quad \forall s \in [0, 1] \\ &\Leftrightarrow \alpha(t + \tfrac{1}{2}) = -\alpha(t) \quad \forall t \in [0, \tfrac{1}{2}]. \end{aligned}$$

Sei wieder $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\varphi(s) = e^{2\pi i s}$, und sei $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hochhebung von α . Dann folgt

$$\varphi(\tilde{\alpha}(t + \tfrac{1}{2})) = -\varphi(\tilde{\alpha}(t)) = \varphi(\tilde{\alpha}(t) + \tfrac{1}{2}) \quad \forall t \in [0, \tfrac{1}{2}],$$

da $\varphi(s + \frac{1}{2}) = -\varphi(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Damit gilt

$$\gamma(t) := \tilde{\alpha}(t + \tfrac{1}{2}) - \tilde{\alpha}(t) - \tfrac{1}{2} \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in [0, \tfrac{1}{2}].$$

Da $\tilde{\alpha}$ stetig ist, ist γ stetig in t , also konstant. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \deg \alpha &= \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) \\ &= \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(\tfrac{1}{2}) + \tilde{\alpha}(\tfrac{1}{2}) - \tilde{\alpha}(0) \\ &= \gamma(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} + \gamma(0) + \tfrac{1}{2} = 2\gamma(0) + 1. \end{aligned}$$

Also ist $\deg \alpha$ ungerade, da $\gamma(0) \in \mathbb{Z}$. $\square$

Satz 7.47 (Satz von Borsuk-Ulam). *Sei $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig. Dann gibt es ein $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Beweis. Angenommen, es gebe ein stetiges $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^2$. Dann ist folgende Abbildung wohldefiniert und stetig:

$$g : S^2 \rightarrow S^1, \quad g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$

Nach Konstruktion ist

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(x) - f(-x)\|} = -\frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} = -g(x).$$

Ist $i : S^1 \hookrightarrow S^2$, $i(x, y) = (x, y, 0)$, so gilt folglich für $g \circ i : S^1 \rightarrow S^1$ nach Lemma 7.46, dass $\deg(\Phi(g \circ i))$ ungerade ist. Also ist $[\Phi(g \circ i)]_w \neq 0$, so dass $[g \circ i] \neq 0 \in [S^1, S^1]$ nach Lemma 7.44.

Dies führt jedoch direkt zu einem Widerspruch: Betrachten wir nämlich $F : D^2 \rightarrow S^1$, $F(x, y) = g(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, so ist F offenbar stetig und für $(x, y) \in S^1$ ist $F(x, y) = g(x, y, 0) = (g \circ i)(x, y)$. Also ist $g \circ i$ nullhomotop via $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$, $H(z, t) = F(tz)$. Damit haben wir einen Widerspruch hergestellt und es kann kein solches f geben. $\square$

Anwendung 7.48. Es bezeichne E die Erdoberfläche, die wir mit S^2 identifizieren. („Flat Earther“ können diese Anwendung gerne überspringen.) Sei dann

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(p) = (\text{Temperatur in } p, \text{Luftdruck in } p).$$

Aus der Meteorologie bzw. unserer Anschauung wissen wir, dass es sinnvoll ist, Temperatur und Luftdruck als stetige Funktionen zu modellieren. Nach Satz von Borsuk-Ulam gibt es dann ein $p \in E$ mit $f(p) = f(-p)$. Also gibt es immer zwei sich auf der Weltkugel genau gegenüberliegende Punkte, an denen genau dieselbe Temperatur und genau derselbe Luftdruck herrscht!

Der Satz von Borsuk-Ulam lässt sich auch nutzen, um geometrische Aussagen über Sphären zu treffen, ein Beispiel dafür ist das folgende Resultat.

Korollar 7.49. Sind $A_1, A_2, A_3 \subset S^2$ abgeschlossen mit $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, so enthält eines der A_i ein Paar antipodaler Punkte, d.h.

$$\exists i \in \{1, 2, 3\}, \quad x \in S^2 \text{ so dass } \{x, -x\} \subset A_i.$$

Beweis. Für $i \in \{1, 2\}$ definieren wir

$$d_i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_i(p) = \inf_{q \in A_i} \|p - q\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichne. Aus der Analysis wissen wir, dass d_1 und d_2 stetig sind, da A_1 und A_2 abgeschlossen sind. Wenden wir den Satz von Borsuk-Ulam auf $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (d_1(x), d_2(x))$ an, so folgt die Existenz eines $x \in S^2$ mit $d_1(x) = d_1(-x)$ und $d_2(x) = d_2(-x)$. Ist $x \in A_i$ für ein $i \in \{1, 2\}$, so folgt $d_i(-x) = d_i(x) = 0$, also ist dann $\{x, -x\} \subset A_i$. Ist $x \notin A_1 \cup A_2$, so ist $d_1(-x) = d_1(x) > 0$ und $d_2(-x) = d_2(x) > 0$, also ist dann auch $-x \notin A_1 \cup A_2$ und damit $\{x, -x\} \subset A_3$. $\square$

Bemerkung 7.50. Der Brouwersche Fixpunktsatz und der Satz von Borsuk-Ulam lassen sich auf beliebige Dimensionen $n \geq 2$ verallgemeinern. Hierfür fehlt uns allerdings noch das notwendige Handwerkszeug aus der algebraischen Topologie. Die höherdimensionalen Versionen lassen sich analog zu den hier vorgestellten mit Hilfe von singulären Homologiegruppen oder höheren Homotopiegruppen beweisen.

Zum Schluss wollen wir noch eine weitere schöne Folgerung aus den bisherigen Ergebnissen angeben, deren Beweis wir auslassen wollen und für den wir auf das Skript zur Vorlesung Topologie von Prof. Christoph Schweigert verweisen, siehe Satz 2.3.17 in <https://www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/ws15/tskript.pdf>. (Es wird etwas Grundwissen über Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ vorausgesetzt.)

Satz 7.51 (Satz vom Igel). Sei $V : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld auf S^2 , d.h. eine stetige Abbildung V mit $\langle V(x), x \rangle = 0$ für alle $x \in S^2$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt bezeichne. Dann gibt es ein $x_0 \in S^2$ mit $V(x_0) = 0$.

Der Name erklärt sich dadurch, dass man ein V so interpretieren kann, dass es für die gekämmten Haare einer von Haaren oder Stacheln bewachsenen Kugel steht. Der Satz sagt dann aus, dass es unmöglich ist, die Haare einer solchen Kugel so zu kämmen, dass kein Wirbel entsteht.

Kapitel 8

Überlagerungen

Wir betrachten eine Klasse von Abbildungen, anhand derer man das Zusammenspiel von Topologie und Algebra besonders gut beobachten: Überlagerungen. Grob gesagt sind Überlagerungen surjektive Abbildungen, bei denen der Bildbereich „mehrfach überdeckt“ wird, was wir an Beispielen noch konkreter sehen werden. Ein erstes Beispiel für eine Überlagerung von S^1 haben wir bereits in Abschnitt 7.3 gesehen. Nach den Grundbegriffen werden wir uns Hochhebungseigenschaften von Überlagerungen anschauen und dort die Betrachtungen aus Abschnitt 7.3 deutlich verallgemeinern.

Anschließend werden wir uns Verbindungen zur Algebra anschauen und zeigen, dass es eine elegante Äquivalenz zwischen Untergruppen der Fundamentalgruppe eines Raumes und Isomorphieklassen von Überlagerungen des Raumes gibt. Schließlich untersuchen wir Deckbewegungsgruppen, mit denen wir eine neue Formel für die Fundamentalgruppen gewisser Bahnräume erhalten, und wenden diese an, um die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche zu berechnen.

In diesem Kapitel werden wir folgende Grundbegriffe der Gruppentheorie benutzen, die aus Algebra I bekannt sein sollten: Index von Untergruppen, konjugierte Untergruppen, normale Untergruppen, Normalisator einer Untergruppe.

8.1 Definition und Konstruktionen von Überlagerungen

In diesem Abschnitt werden wir den Begriff der Überlagerung definieren, Beispiele betrachten und zeigen, wie Überlagerungen aus diskreten Gruppenwirkungen hervorgehen.

Definition 8.1. Seien E und X topologische Räume. Eine surjektive Abbildung

$$p : E \rightarrow X$$

heißt *Überlagerung von X* , wenn jeder Punkt in X eine offene Umgebung U besitzt, so dass

- $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ wobei jedes V_i offen in E ist für jedes $i \in I$,
- jedes V_i von p homöomorph auf U abgebildet wird, d.h. die Einschränkung

$$p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$$

ist ein Homöomorphismus für jedes $i \in I$.

Für jedes $x \in X$ setzen wir $E_x := p^{-1}(\{x\})$ und nennen E_x die *Faser von x* . Falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass E_x für jedes x genau n Elemente enthält, so heißt p eine *n -blättrige Überlagerung*.

Bemerkung 8.2. Aus der lokalen Homöomorphieeigenschaft folgt insbesondere, dass jede Überlagerung stetig ist.

Im folgenden Beispiel sehen wir, dass einige in dieser Vorlesung schon betrachtete Abbildungen tatsächlich Überlagerungen sind.

Beispiel 8.3. (1) Ist X ein topologischer Raum und T ein diskreter Raum, so ist die Projektion $\text{pr}_X : X \times T \rightarrow X$ eine Überlagerung.

(2) Jeder Homöomorphismus ist eine Überlagerung.

(3) Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\varphi(s) = e^{2\pi i s}$, die Abbildung aus Abschnitt 7.3. Ist $z_0 = e^{2\pi i s_0} \in S^1$ beliebig, so ist $U := S^1 \setminus \{-z_0\}$ eine offene Umgebung von z_0 und es ist

$$\varphi^{-1}(U) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} (k + s_0 - \tfrac{1}{2}, k + s_0 + \tfrac{1}{2}).$$

Jedes $(k + s_0 - \frac{1}{2}, k + s_0 + \frac{1}{2})$ wird durch φ homöomorph auf U abgebildet. Also ist φ eine Überlagerung.

(4) Für $n > 1$ ist die Abbildung $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $\pi(x) = \mathbb{R}x$, ist eine zweiblättrige Überlagerung: Sei $x \in S^n$ und $U \subset S^n$ eine offene Umgebung von x mit $U \cap (-U) = \emptyset$. Dann ist $\pi(U)$ nach Satz 5.18 eine offene Umgebung von $\mathbb{R}x$ in $\mathbb{R}P^n$ mit

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = U \sqcup (-U)$$

und nach Konstruktion bildet π sowohl U als auch $-U$ homöomorph auf $\pi(U)$ ab, so dass π eine Überlagerung ist. Da $\pi^{-1}(\{\mathbb{R}x\}) = \{x, -x\}$ für alle $x \in S^n$, ist π zweiblättrig.

Der folgende Satz bündelt einige elementare Eigenschaften von Überlagerungen.

Satz 8.4. a) Sind $p_1 : E_1 \rightarrow X_1$ und $p_2 : E_2 \rightarrow X_2$ Überlagerungen, so sind

$$p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow X_1 \times X_2 \quad \text{und} \quad p_1 \sqcup p_2 : E_1 \sqcup E_2 \rightarrow X_1 \sqcup X_2$$

wieder Überlagerungen.

b) Sind $p : E \rightarrow X$ und $q : X \rightarrow Y$ Überlagerungen, so ist $q \circ p : E \rightarrow Y$ eine Überlagerung.

c) Jede Überlagerung ist eine Identifizierungsabbildung.

Beweis. Dies ist Aufgabe 3 von Übungsblatt 12. □

Um Überlagerungen mit diskreten Gruppenwirkungen zu verbinden, definieren wir eine neue und etwas kurios benannte Eigenschaft von Gruppenwirkungen.

Definition 8.5. Sei G eine diskrete Gruppe mit neutralem Element e und X ein G -Raum. Die G -Wirkung heißt *eigentlich diskontinuierlich*, falls jedes $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass $(g \cdot U) \cap U = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$, wobei $g \cdot U = \{g \cdot x \in X \mid x \in U\}$.

Bitte beachten: In der Literatur sind mehrere unterschiedliche Definitionen von „eigentlich diskontinuierlich“ zu finden, die sich geringfügig voneinander unterscheiden.

Satz 8.6. Sei G eine diskrete Gruppe und X ein G -Raum. Ist die G -Wirkung eigentlich diskontinuierlich, so ist die Projektion $p : X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung.

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig und sei U eine offene Umgebung von x , so dass $gU \cap U = \emptyset$ für jedes $g \in G \setminus \{e\}$. Nach Satz 5.18 ist $V := p(U)$ eine offene Umgebung von $p(x)$ und nach Definition von p ist

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} gU.$$

Nach Wahl von U ist die Vereinigung disjunkt: wäre nämlich $g_1U \cap g_2U \neq \emptyset$ für $g_1 \neq g_2$, so wäre auch $(g_2^{-1}g_1U) \cap U \neq \emptyset$, was im Widerspruch zur Annahme stünde. Die Einschränkung $p|_{gU} : gU \rightarrow V$ ist stetig und bijektiv für jedes $g \in G$. Da p offen ist, ist $p|_{gU}$ offen, also ist $p|_{gU}$ ein Homöomorphismus für jedes $g \in G$. Also ist p eine Überlagerung. □

Eine häufige Quelle für eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkungen ist die Betrachtung diskreter Untergruppen topologischer Gruppen, worauf wir als nächstes hinarbeiten wollen.

Lemma 8.7. Sei G eine topologische Gruppe mit neutralem Element e . Für jede Umgebung U von e gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von e , so dass $V^{-1} = V$ und $v_1v_2 \in U$ für alle $v_1, v_2 \in V$. Hierbei sei $V^{-1} = \{v^{-1} \in G \mid v \in V\}$.

Beweis. Da die Gruppenmultiplikation $m : G \times G \rightarrow G$ stetig ist, ist $m^{-1}(U)$ offen in $G \times G$. Da $e \in U$, gibt es offene Umgebungen $U_1, U_2 \subset G$ von e mit $U_1 \times U_2 \subset m^{-1}(U)$. Da die Inversion stetig ist, sind U_1^{-1} und U_2^{-1} wieder Umgebungen von e . Setzen wir

$$V := U_1 \cap U_2 \cap U_1^{-1} \cap U_2^{-1},$$

so folgt leicht, dass V die gewünschten Eigenschaften hat. □

Satz 8.8. Ist G eine topologische Gruppe und H eine diskrete Untergruppe, so ist die H -Wirkung $\bullet : H \times G \rightarrow G, h \bullet g := gh^{-1}$, eigentlich diskontinuierlich.

Beweis. Da H diskret ist, gibt es eine offene Umgebung U von e mit $U \cap H = \{e\}$. Sei dann $V \subset U$ eine offene Umgebung von e wie in Lemma 8.7, so dass insbesondere

$$g_1^{-1}g_2 \in U \quad \forall g_1, g_2 \in V. \quad (8.1)$$

Für jedes $g \in G$ ist dann $U_g := gV$ eine offene Umgebung von g . Ist dann $h \in H$, so dass $(h \bullet U_g) \cap U_g \neq \emptyset$, so gäbe es ein $v_1, v_2 \in V$, so dass $gv_1h^{-1} = gv_2$, also folgt

$$v_1h^{-1} = v_2 \quad \Leftrightarrow h = v_2^{-1}v_1.$$

Aus (8.1) folgt $h \in U \cap H = \{e\}$, also $h = e$. Damit ist die Wirkung eigentlich diskontinuierlich. $\square$

Korollar 8.9. Ist G eine topologische Gruppe und $H \subset G$ eine diskrete Untergruppe, so ist die Projektion $\pi : G \rightarrow G/H$ eine Überlagerung.

Beweis. Dies folgt aus Satz 8.6 und Satz 8.8, da G/H als Bahnraum der Wirkung $\bullet$ aus Satz 8.8 definiert ist. $\square$

Beispiel 8.10. Betrachten wir $(\mathbb{R}^n, +)$ als topologische Gruppe, so ist $\mathbb{Z}^n$ eine diskrete Untergruppe, also ist nach Korollar 8.9 die Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ eine Überlagerung. In Beispiel 5.32 haben wir gesehen, dass es einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} T^n$ gibt, also ist $p := f \circ \pi : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ eine Überlagerung.

Aus Korollar 8.9 erhalten wir weitere Beispiele für Überlagerungen mit Hilfe komplex differenzierbarer Funktionen, die historisch betrachtet den Begriff der Überlagerung motiviert haben. Diese bündeln wir im folgenden Satz.

Satz 8.11. a) Für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist $p_n : S^1 \rightarrow S^1$, $p_n(z) = z^n$, eine n -blättrige Überlagerung.

b) Für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist $f_n : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $f_n(z) = z^n$, eine n -blättrige Überlagerung.

c) Die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist eine Überlagerung.

Beweis. a) S^1 bildet mit der komplexen Multiplikation eine topologische Gruppe. Für jedes $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist $H_n := \{z \in S^1 \mid z^n = 1\}$ eine diskrete Untergruppe von S^1 , also ist nach Korollar 8.9 die Projektion $\pi : S^1 \rightarrow S^1/H_n$ eine Überlagerung.

p_n ist surjektiv und stetig. Man zeigt ebenfalls leicht (Übung), dass p_n abgeschlossen ist, also ist p_n nach Satz 2.30 eine Identifizierung. Weiter ist p_n ein Gruppenhomomorphismus mit $\ker p_n = H_n$, woraus folgt, dass $p_n(z_1) = p_n(z_2)$ genau dann gilt, wenn $\pi(z_1) = \pi(z_2)$. Nach Satz 2.31 gibt es daher einen Homöomorphismus $f : S^1/H_n \rightarrow S^1$ mit $p_n = f \circ \pi$. Also ist p_n nach Satz 8.4.b) eine Überlagerung. Da $|H_n| = n$, ist π offensichtlich n -blättrig, woraus folgt, dass auch p_n eine n -blättrige Überlagerung ist.

- b) $\mathbb{C}^*$ bildet mit der komplexen Multiplikation eine topologische Gruppe. Aus der Funktionentheorie wissen wir, dass die komplexe Ableitung von f_n für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gegeben ist durch

$$f'_n(z) = nz^{n-1} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Daraus folgt insbesondere, dass das reelle Differential von f_n als Abbildung $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ an jedem Punkt invertierbar ist. Nach dem Satz über inverse Funktionen gibt es daher zu jedem $z \in \mathbb{C}$ eine offene Umgebung U , für die $f(U)$ eine offene Umgebung von $f(z)$ ist. Daraus folgt, dass f_n eine offene Abbildung ist. Da f_n ebenfalls surjektiv und stetig ist, ist f_n nach Satz 2.30 eine Identifizierung. Die Behauptung folgt nun analog zu Teil a), indem wir H_n wie in Teil a) definieren und als Untergruppe von $\mathbb{C}^*$ betrachten, da auch f_n ein Gruppenhomomorphismus ist mit $\ker f_n = H_n$.

- c) Aus der Analysis wissen wir, dass $\exp$ surjektiv und stetig ist. Analog zu b) folgt, dass $\exp$ offen und damit nach Satz 2.30 eine Identifizierung ist. Betrachten wir $\mathbb{C}$ mit der Addition als topologische Gruppe und $\mathbb{C}^*$ mit der Multiplikation, so ist $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ein Gruppenhomomorphismus mit $K := \ker \exp = \{2\pi in \mid n \in \mathbb{Z}\}$. K ist eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{C}$, also ist $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/K$ nach Korollar 8.9 eine Überlagerung. Analog zu a) und b) folgt daraus, dass auch $\exp$ eine Überlagerung ist.

□

8.2 Hochhebungseigenschaften von Überlagerungen

In Abschnitt 7.3 haben wir Hochhebungen von Abbildungen $X \rightarrow S^1$ bezüglich der Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\varphi(s) = e^{2\pi is}$, betrachtet und durch sie unter anderem den Grad einer Schleife definiert. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass φ ein Beispiel einer Überlagerung ist und tatsächlich lassen sich analog definierte Hochhebungen für beliebige Überlagerungen betrachten.

Definition 8.12. Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung, Y ein topologischer Raum und $f : Y \rightarrow X$ stetig. Eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ heißt *Hochhebung von f bezüglich p* , wenn $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Existenz und Eindeutigkeit von Hochhebungen von Abbildungen bezüglich Überlagerungen beschäftigen. Dazu werden wir in mehreren Schritten vorgehen und dabei unter anderem Satz 7.27 und Satz 7.30 von der Überlagerung φ auf den allgemeinen Fall übertragen. Wir führen für die Betrachtungen in diesem Abschnitt folgenden Begriff ein.

Definition 8.13. Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung. Wir nennen $U \subset X$ *elementar*, wenn $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$, wobei $V_i \subset E$ offen für alle $i \in I$, so dass $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ für jedes $i \in I$ ein Homöomorphismus ist. (Insbesondere besitzt also jeder Punkt in X eine elementare Umgebung.)

Die Eindeutigkeit von Hochhebungen, für die ihr Wert an einem Punkt vorgegeben ist, lässt sich allgemein ohne große Probleme beweisen.

Satz 8.14 (Eindeutigkeitssatz für Hochhebungen). Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung. Sei Y ein zusammenhängender topologischer Raum und sei $f : Y \rightarrow X$ stetig. Sind $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow E$ Hochhebungen von f bezüglich p und gibt es ein $y \in Y$ mit $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$, so ist $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

Beweis. Setze $A := \{y \in Y \mid \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\} \neq \emptyset$. Wir müssen zeigen, dass $A = Y$. Da Y zusammenhängend ist, reicht es nach Satz 3.4 zu zeigen, dass A offen und abgeschlossen in Y ist.

Sei $y_0 \in A$, $e_0 := \tilde{f}_1(y_0)$ und $x_0 := p(e_0) = f(y_0)$. Sei $U \subset X$ eine elementare Umgebung von x_0 und sei $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$. Dann gibt es ein $i_0 \in I$ mit $e_0 \in V_{i_0}$. Definiere $W := \tilde{f}_1^{-1}(V_{i_0}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(V_{i_0})$. W ist eine offene Umgebung von y_0 mit $\tilde{f}_1(W) \subset V_{i_0}$ und $\tilde{f}_2(W) \subset V_{i_0}$. Nach Annahme ist $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2$, da p jedoch auf V_{i_0} injektiv ist, folgt insbesondere $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$ für alle $y \in W$, also $W \subset A$. Folglich ist A offen in Y .

Um zu sehen, dass A abgeschlossen ist sei $y_0 \in Y \setminus A$ und setze $e_1 := \tilde{f}_1(y_0)$, $e_2 := \tilde{f}_2(y_0)$ und $x_0 := p(e_1) = f(y_0)$. Sei wieder U eine elementare Umgebung von x_0 mit $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$. Da $e_1, e_2 \in E_{x_0}$ mit $e_1 \neq e_2$, gibt es $i_1, i_2 \in I$ mit $i_1 \neq i_2$, so dass $e_1 \in V_{i_1}$ und $e_2 \in V_{i_2}$. Setze dann $V := \tilde{f}_1^{-1}(V_{i_1}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(V_{i_2})$. V ist offene Umgebung von y_0 in Y mit $\tilde{f}_1(V) \subset V_{i_1}$ und $\tilde{f}_2(V) \subset V_{i_2}$. Da $V_{i_1} \cap V_{i_2} = \emptyset$, folgt $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$ für alle $y \in V$, also $V \subset Y \setminus A$, so dass $Y \setminus A$ offen und damit A abgeschlossen in Y ist. Also folgt die Behauptung. $\square$

Als Nächstes verallgemeinern wir Satz 7.27, zeigen also die Existenz einer eindeutigen Hochhebung von Wegen bei vorgegebenem Anfangspunkt.

Satz 8.15 (Hochhebungssatz für Wege). Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung und $\gamma \in PX$. Dann gibt es für jedes $e_0 \in E_{\gamma(0)}$ eine eindeutige Hochhebung $\tilde{\gamma} \in PE$ von γ bezüglich p mit $\tilde{\gamma}(0) = e_0$.

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{0 \mapsto e_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array}$$

Beweis. Die Eindeutigkeit der Hochhebung folgt aus Satz 8.14. Die Existenz eines hochgehobenen Weges zeigt man völlig analog zum Spezialfall $p = \varphi$ aus Satz 7.27 mit Hilfe des Lebesgueschen Überdeckungslemmas. $\square$

Als nächstes betrachten wir Hochhebungen von Homotopien. Hierbei geht man davon aus, dass der „Anfang“ der Homotopie bereits eine Hochhebung besitzt und zeigt, dass sich diese dann zu einer Hochhebung der Homotopie fortsetzen lässt.

Satz 8.16 (Hochhebungssatz für Homotopien). *Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung. Sei Y ein lokal zusammenhängender topologischer Raum. Sei $f : Y \rightarrow X$ stetig und $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ stetig mit $H(y, 0) = f(y)$ für alle $y \in Y$. Ist $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ eine Hochhebung von f bezüglich p , so gibt es eine eindeutige Hochhebung $\tilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow E$ bezüglich p , so dass $\tilde{H}(y, 0) = \tilde{f}(y)$ für alle $y \in Y$.*

Ist $A \subset Y$ und H relative Homotopie bezüglich A , so ist $\tilde{H}$ relative Homotopie bezüglich A .

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow & \searrow \tilde{H} & \downarrow p \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Beweis. Im Folgenden bezeichnen wir eine Hochhebung bezüglich p schlicht als Hochhebung. Sei $(U_j)_{j \in J}$ eine Überdeckung von X , für die jedes U_j elementar ist. Sei zunächst $y_0 \in Y$ fest gewählt. Da $H(y_0, \cdot) : [0, 1] \rightarrow X$ stetig ist, folgt analog zum Beweis von Satz 7.27 aus dem Lebesgueschen Überdeckungssatz, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ und $j_0, \dots, j_{n-1} \in J$ gibt, so dass $H(\{y_0\} \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subset U_{j_i}$ für alle $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Da H stetig und die U_{j_i} offen sind, folgt, dass es für jedes i eine offene Umgebung W_i von $y_0 \in Y$ gibt, so dass $H(W_i \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subset U_{j_i}$. Setzen wir $W := \bigcap_{i=0}^{n-1} W_i$, so ist W wieder Umgebung von y_0 und nach Konstruktion ist

$$H(W \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subset U_{j_i} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Da Y nach Voraussetzung lokal zusammenhängend ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass W zusammenhängend ist. Wir gehen nun ähnlich wie im Beweis von Satz 7.27 vor, um eine Hochhebung von H in mehreren Schritten zu konstruieren.

- Da W zusammenhängend ist gibt es nach Konstruktion ein $V_0 \subset p^{-1}(U_{j_0})$, für das $p_0 := p|_{V_0} : V_0 \rightarrow U_{j_0}$ ein Homöomorphismus ist und so dass $\tilde{f}(W) \subset V_0$. Definiere dann

$$\tilde{H}_0 : W \times [0, \frac{1}{n}] \rightarrow E, \quad \tilde{H}_0(y, t) := (p_0^{-1} \circ H)(y, t).$$

Nach Konstruktion ist $\tilde{H}_0$ eine wohldefinierte Hochhebung von $H|_{W \times [0, \frac{1}{n}]}$. Da $W \times [0, \frac{1}{n}]$ zusammenhängend ist, ist $\tilde{H}$ nach Satz 8.14 die eindeutige Hochhebung mit $\tilde{H}(y, 0) = \tilde{f}(y)$ für alle $y \in W$.

- Sei für $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ eine eindeutige Hochhebung $\tilde{H}_{i-1} : W \times [0, \frac{i}{n}] \rightarrow E$ von $H|_{W \times [0, \frac{i}{n}]}$ gegeben. Nach Konstruktion ist $H(W \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subset U_{j_i}$ und analog zum letzten Schritt gibt es ein $V_i \subset p^{-1}(U_{j_i})$, für das $p_i := p|_{V_i} : V_i \rightarrow U_{j_i}$ ein Homöomorphismus ist und so dass $\tilde{H}_{i-1}(W \times \{\frac{i}{n}\}) \subset V_i$. Definiere dann

$$\tilde{H}_i : W \times [0, \frac{i+1}{n}] \rightarrow E, \quad \tilde{H}_i(y, t) := \begin{cases} \tilde{H}_{i-1}(y, t) & \text{falls } t \in [0, \frac{i}{n}], \\ (p_i^{-1} \circ H)(y, t) & \text{falls } t \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]. \end{cases}$$

$\tilde{H}_i$ ist bei $t = \frac{i}{n}$ stetig, da $\tilde{H}_{i-1}|_{W \times \{\frac{i}{n}\}}$ und $p_i^{-1} \circ H|_{W \times \{\frac{i}{n}\}}$ beide Hochhebungen von $H|_{W \times \{\frac{i}{n}\}}$ sind und somit nach Satz 8.14 übereinstimmen, da W zusammenhängend ist. Nach Konstruktion ist $\tilde{H}_i$ folglich die eindeutige Hochhebung von $H|_{W \times [0, \frac{i+1}{n}]}$ mit $\tilde{H}_i(y, 0) = \tilde{f}(y)$ für alle $y \in W$.

Konstruieren wir uns auf diese Weise induktiv eine Familie von Hochhebungen, so ist $\tilde{H}_W := \tilde{H}_{n-1} : W \times [0, 1] \rightarrow E$ eine Hochhebung von $H|_{W \times [0, 1]}$ mit $\tilde{H}_W(y, 0) = \tilde{f}(y)$ für alle $y \in W$.

Wir haben also nun zu jedem $y_0 \in Y$ eine Umgebung W konstruiert, für die sich $H|_{W \times [0, 1]}$ auf die gewünschte Weise hochheben lässt. Nun müssen wir zeigen, dass sich die einzelnen $\tilde{H}_W$ zu einer Homotopie auf Y zusammenfügen lassen. Seien dazu $y_0, y_1 \in Y$, W eine derartige Umgebung von y_0 und W' eine derartige Umgebung von y_1 mit $W \cap W' \neq \emptyset$ und seien $\tilde{H}_W$ und $\tilde{H}_{W'}$ die beiden Hochhebungen von H .

Sei dann $b \in W \cap W'$ und $\gamma \in PX$, $\gamma(s) = H(b, s)$. Dann sind nach Voraussetzung $\tilde{\gamma}_W(s) := \tilde{H}_W(b, s)$ und $\tilde{\gamma}_{W'}(s) := \tilde{H}_{W'}(b, s)$ beide Hochhebungen von γ mit $\tilde{\gamma}_W(0) = \tilde{f}(b) = \tilde{\gamma}_{W'}(0)$. Aus der Eindeutigkeit aus Satz 8.15, dass $\tilde{\gamma}_W = \tilde{\gamma}_{W'}$, also $\tilde{H}_W|_{\{b\} \times [0, 1]} = \tilde{H}_{W'}|_{\{b\} \times [0, 1]}$. Führen wir dieses Argument für jedes $b \in W \cap W'$ durch, so erhalten wir, dass $\tilde{H}_W|_{(W \cap W') \times [0, 1]} = \tilde{H}_{W'}|_{(W \cap W') \times [0, 1]}$.

Damit folgt aus dem Verklebungslemma (Satz 4.2), dass sich die eindeutigen lokalen Hochhebungen zu einer eindeutigen Hochhebung $\tilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow E$ von H zusammenfügen lassen.

Es bleibt die Aussage über relative Homotopien zu zeigen. Sei $A \subset Y$ so, dass $H(a, t) = H(a, 0) = f(a)$ für alle $a \in A$. Mit anderen Worten ist $c_{f(a)}(t) = H(a, t)$ für alle $a \in A$ und $t \in [0, 1]$, wobei $c_{f(a)} \in PX$ den konstanten Weg bezeichne. Dann ist $c_{\tilde{f}(a)} \in PE$ eine Hochhebung von $c_{f(a)}$ mit $c_{\tilde{f}(a)}(0) = \tilde{f}(a)$, also folgt wieder mit der Eindeutigkeit aus Satz 8.15, dass $\tilde{H}(a, t) = c_{\tilde{f}(a)}(t) = \tilde{f}(a)$ für alle $t \in [0, 1]$. Da $a \in A$ beliebig gewählt war, ist $\tilde{H}$ eine relative Homotopie bezüglich A . $\square$

Bemerkung 8.17. Als Spezialfall von Satz 8.16 erhalten wir Satz 7.30, den wir damit also auch bewiesen haben.

Aus dem letzten Satz lässt sich ein nützliches Resultat über die Hochhebungen weghomotoper Wege folgern.

Satz 8.18 (Monodromiesatz). *Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung und seien $\gamma_1, \gamma_2 \in PX$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Seien $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \in PE$ Hochhebungen von γ_1 bzw. γ_2 bezüglich p mit $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0)$. Dann ist $\gamma_1 \simeq_w \gamma_2$ genau dann, wenn $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$ und $\tilde{\gamma}_1 \simeq_w \tilde{\gamma}_2$.*

Beweis. „ $\Leftarrow$ “: Dies ist klar. Ist $\tilde{H}$ eine Weghomotopie von $\tilde{\gamma}_1$ nach $\tilde{\gamma}_2$, so ist $p \circ \tilde{H}$ eine Weghomotopie von γ_1 nach γ_2 .

„ $\Rightarrow$ “: Sei $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ eine Weghomotopie von γ_1 nach γ_2 . Nach Satz 8.16 gibt es eine Hochhebung $\tilde{H} : [0, 1]^2 \rightarrow E$ von H mit $\tilde{H}(s, 0) = \tilde{\gamma}_1(s)$ für alle $s \in [0, 1]$. Da eine

Weghomotopie eine Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$ ist, folgt aus Satz 8.16 außerdem, dass $\tilde{H}$ wieder Weghomotopie ist.

Da $p \circ \tilde{H} = H$, folgt leicht, dass $\tilde{H}(\cdot, 1)$ eine Hochhebung von γ_2 ist. Da $\tilde{H}$ Weghomotopie ist, ist insbesondere $\tilde{H}(0, 1) = \tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0)$. Nach der Eindeutigkeit aus Satz 8.15 folgt daraus, dass $\tilde{\gamma}_2(s) = \tilde{H}(s, 1)$ für alle $s \in [0, 1]$ und da $\tilde{H}$ Weghomotopie ist, folgt $\tilde{\gamma}_1 \simeq_w \tilde{\gamma}_2$ und $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$. $\square$

Korollar 8.19. Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung. Für jedes $e \in E$ ist der Gruppenhomomorphismus $p_* : \pi_1(E, e) \rightarrow \pi_1(X, p(e))$ injektiv.

Beweis. Sei $e \in E$, $x := p(e)$ und $\alpha \in \Omega(E, e)$ mit $[\alpha]_w \in \ker p_*$. Dann ist $p \circ \alpha \simeq_w c_x$. Nach Konstruktion ist α eine Hochhebung von $p \circ \alpha$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = e$, außerdem ist der konstante Weg c_e eine Hochhebung von c_x mit $c_e(0) = c_e(1) = e$. Nach dem Monodromiesatz sind deshalb α und c_e weghomotop, also ist $[\alpha]_w = [c_e]_w = 1$. Damit ist $\ker p_* = \{1\}$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

In den bisherigen Hochhebungssätzen haben wir die Existenz von Hochhebungen von Wegen gezeigt, jedoch bei den anderen Ergebnissen gewisse Existenzen von Hochhebungen vorausgesetzt. Es bleibt die Frage, wann eine beliebige Abbildung $f : Y \rightarrow X$ eine Hochhebung bezüglich einer Überlagerung von X besitzt. Unter gewissen Zusammenhangsvoraussetzungen an Y lässt sich diese Frage allgemein mit Hilfe der beteiligten Fundamentalgruppen beantworten.

Satz 8.20 (Existenzkriterium für Hochhebungen). Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung und sei $e_0 \in E$. Sei Y ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum, sei $f : Y \rightarrow X$ stetig und sei $y_0 \in Y$ mit $f(y_0) = p(e_0)$. Dann gilt: Es gibt genau dann eine Hochhebung $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ von f bezüglich p mit $\tilde{f}(y_0) = e_0$, wenn

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

$$\begin{array}{ccc} \{y_0\} & \xrightarrow{y_0 \mapsto e_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Da $f = p \circ \tilde{f}$, ist insbesondere

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

„ $\Leftarrow$ “: (Unter einer Hochhebung verstehen wir stets eine Hochhebung bezüglich p .)

Nach Satz 3.26.c) ist Y wegzusammenhängend. Für jedes $y \in Y$ wähle $\gamma_y \in P(Y, y_0, y)$ und definiere eine Abbildung

$$\tilde{f} : Y \rightarrow E, \quad \tilde{f}(y) := (\widetilde{f \circ \gamma_y})(1),$$

wobei $\widetilde{f \circ \gamma_y}$ die eindeutige Hochhebung von $f \circ \gamma_y$ mit $(\widetilde{f \circ \gamma_y})(0) = e_0$ bezeichne.

Behauptung 1 $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ ist wohldefiniert.

Beweis der Behauptung. Sei $y \in Y$ und seien $\gamma_y, \gamma'_y \in P(Y, y_0, y)$. Dann ist $\alpha_y := \gamma_y * \tilde{\gamma}'_y \in \Omega(Y, y_0)$ und nach Annahme ist

$$f_*([\alpha_y]_w) \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Folglich gibt es ein $\beta_y \in \Omega(E, e_0)$ mit $[f \circ \alpha]_w = [p \circ \beta]_w$ und damit

$$p \circ \beta \simeq_w f \circ \alpha = f \circ (\gamma_y * \tilde{\gamma}'_y) = (f \circ \gamma_y) * (f \circ \tilde{\gamma}'_y) = (f \circ \gamma_y) * \overline{(f \circ \gamma'_y)},$$

wobei wir Satz 6.30.b) benutzt haben. Mit Satz 6.29 folgt daraus:

$$(p \circ \beta) * (f \circ \gamma'_y) \simeq_w f \circ \gamma_y. \quad (8.2)$$

Wir wollen nun beide Seiten der Relation hochheben. Da β Hochhebung von $p \circ \beta$ mit $\beta(0) = \beta(1) = e_0$ ist, ist $\beta * \widetilde{(f \circ \gamma'_y)}$ wohldefiniert und man überlegt sich leicht, dass dies eine Hochhebung von $(p \circ \beta) * (f \circ \gamma'_y)$ ist. Aus (8.2) folgt daher mit dem Monodromiesatz, dass

$$(\beta * \widetilde{(f \circ \gamma'_y)})(1) = \widetilde{(f \circ \gamma_y)}(1).$$

Nach Konstruktion der Kontatenation ist jedoch $(\beta * \widetilde{(f \circ \gamma'_y)})(1) = \widetilde{(f \circ \gamma'_y)}(1)$, also folgt

$$\widetilde{(f \circ \gamma'_y)}(1) = \widetilde{(f \circ \gamma_y)}(1)$$

und damit, dass $\varphi(y)$ unabhängig von der Wahl des Weges, also wohldefiniert ist. ■

Behauptung 2 Ist $W \subset Y$ wegzusammenhängend, so ist $\tilde{f}(W) \subset E$ wegzusammenhängend.

Beweis der Behauptung. Seien $y_1, y_2 \in W$ und $\gamma \in P(W, y_1, y_2)$, welches nach Annahme existiert. Sei $\gamma_0 \in P(Y, y_0, y_1)$, so dass $\gamma_0 * \gamma \in P(Y, y_0, y_2)$. Für jedes $t \in [0, 1]$ sei $\beta_t \in PY$ eine geeignete Umparametrisierung von $(\gamma_0 * \gamma)|_{[0, \frac{t+1}{2}]}$. Nach Konstruktion ist dann $\beta_t \in P(y_0, \gamma(t))$ und nach Behauptung 1 folgt, dass

$$\tilde{f}(\gamma(t)) = \widetilde{(f \circ \beta_t)}(1) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Mit Hilfe der Eindeutigkeit aus Satz 8.15 rechnet man nach (Übung), dass $\widetilde{f \circ \beta_t}$ eine Umparametrisierung von $\widetilde{(f \circ \gamma_0) * (f \circ \gamma)}|_{[0, \frac{t+1}{2}]}$ ist. Damit folgt jedoch, dass

$$\tilde{f}(\gamma(t)) = \widetilde{(f \circ \beta_t)}(1) = \widetilde{(f \circ \gamma)}(t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

also dass $\tilde{f} \circ \gamma = \widetilde{f \circ \gamma}$. Damit ist $\tilde{f} \circ \gamma$ stetig und nach Konstruktion ist $\tilde{f} \circ \gamma$ ein Weg in $\tilde{f}(W)$ von $\tilde{f}(y_1)$ nach $\tilde{f}(y_2)$. Folglich ist $\tilde{f}(W)$ wegzusammenhängend. ■

Behauptung 3 $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ ist stetig.

Beweis der Behauptung. Sei $y \in Y$, sei $U \subset X$ eine elementare offene Umgebung von $f(y)$ und sei $V \subset p^{-1}(U)$, so dass V von p homöomorph auf U abgebildet wird und so dass $\tilde{f}(y) \in V$. Setze $p_V := p|_V : V \xrightarrow{\sim} U$. Da Y lokal wegzusammenhängend und f stetig ist, gibt es eine wegzusammenhängende Umgebung W von y mit $W \subset f^{-1}(U)$. Nach Behauptung 2 ist $\tilde{f}(W)$ wegzusammenhängend und damit $\tilde{f}(W) \subset V$, da $\tilde{f}(y) \in V$. Daher ist

$$\tilde{f}(z) = (p_V^{-1} \circ p_V \circ \tilde{f})(z) = (p_V^{-1} \circ f)(z) \quad \forall z \in W.$$

Da f und p_V^{-1} stetig sind, folgt, dass $\tilde{f}$ auf W und damit insbesondere in y stetig ist. Da y beliebig gewählt war, ist $\tilde{f}$ stetig. ■

Es folgt aus der Definition von $\tilde{f}$, dass

$$(p \circ \tilde{f})(y) = p\left(\widetilde{(f \circ \gamma_y)}(1)\right) = (f \circ \gamma_y)(1) = f(y).$$

Da $\tilde{f}$ stetig ist, ist $\tilde{f}$ also eine Hochhebung von f . Da $\tilde{f}$ unabhängig von der Wahl der Wege ist, können wir $\gamma_{y_0} = c_{y_0}$ annehmen. Dann ist $f \circ c_{y_0} = c_{f(x_0)}$, für die $c_{f(x_0)} = c_{e_0}$ gilt. Also ist nach Konstruktion $\tilde{f}(y_0) = c_{e_0}(1) = e_0$, so dass $\tilde{f}$ alle gewünschten Eigenschaften hat. □

Hieraus können wir direkt eine Situation herleiten, in der Hochhebungen stets möglich sind.

Korollar 8.21. Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung und sei $e_0 \in E$. Ist Y einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und ist $f : Y \rightarrow X$ stetig und $y_0 \in Y$ mit $f(y_0) = p(e_0)$, so gibt es eine eindeutige Hochhebung $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ von f bezüglich p mit $\tilde{f}(y_0) = e_0$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 8.14 und Satz 8.20. □

8.3 Fasertransport und Monodromiewirkung

In diesem Abschnitt wollen wir die Resultate über Hochhebungen von Wegen in Überlagerungen aus dem letzten Abschnitt benutzen und mit dem Fundamentalgruppoiden des überlagerten Raumes zusammenbringen. Es stellt sich heraus, dass wir mit Hilfe der Hochhebungen einen Funktor definieren können, der unter anderem Wirkungen der Fundamentalgruppe des überlagerten Raumes auf den Fasern der Überlagerung definiert. Aus diesen Wirkungen lassen sich weitere Informationen über die Überlagerung ziehen, mit der wir unter anderem die Fundamentalgruppen von $\mathbb{R}P^n$ bestimmen können.

Satz/Definition 8.22. Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann erhalten wir einen wohldefinierten kovarianten Funktor

$$M_p : \Pi(X) \rightarrow \text{Set}$$

durch

- $M_p(x) = E_x = p^{-1}(\{x\})$ für alle $x \in X = \text{Ob } \Pi(X)$,
- für alle $x_0, x_1 \in X$, und $\gamma \in P(X, x_0, x_1)$, so dass $[\gamma]_w \in \text{Mor}_{\Pi(X)}(x_0, x_1)$ definieren wir $M_p([\gamma]_w) \in \text{Mor}_{\text{Set}}(M_p(x_0), M_p(x_1)) = \text{Abb}(E_{x_0}, E_{x_1})$ durch

$$M_p([\gamma]_w) : E_{x_0} \rightarrow E_{x_1}, \quad M_p([\gamma]_w)(e) = \tilde{\gamma}_e(1),$$

wobei $\tilde{\gamma}_e \in PE$ die eindeutige Hochhebung von γ mit $\tilde{\gamma}_e(0) = e$ bezeichne.

Der Funktor $M_p : \Pi(X) \rightarrow \text{Set}$ heißt der Fasertransportfunktor von p oder Monodromiefunktor von p .

Beweis. Die Wohldefiniertheit von M_p auf $\text{Ob } \Pi(X)$ ist klar. Die Wohldefiniertheit von $M_p([\gamma]_w)$, also die Unabhängigkeit des Endpunkts der Hochhebung homotoper Wege vom konkreten Weg, ist Teil des Monodromiesatzes (Satz 8.18). Also sind die zu M_p gehörenden Zuordnungen wohldefiniert.

Ist $x \in X$ und $e \in E_x$, so ist c_e die eindeutige Hochhebung von c_x mit $c_e(0) = e$, also ist $(M_p([c_x]_w))(e) = c_e(1) = e$ für alle $e \in E$. Damit gilt

$$M_p(1_x) = M_p([c_x]_w) = \text{id}_{M_p(x)} = 1_{M_p(x)} \quad \forall x \in X,$$

wir haben also Funktoreigenschaft (i) gezeigt.

Seien nun $x_0, x_1, x_2 \in X$, $\gamma_1 \in P(X, x_0, x_1)$, $\gamma_2 \in P(X, x_1, x_2)$ und $e_0 \in E_{x_0} = M_p(x_0)$. Sei $\tilde{\gamma}_1$ die eindeutige Hochhebung von γ_1 mit $\tilde{\gamma}_1(0) = e_0$ und $\tilde{\gamma}_2$ die eindeutige Hochhebung von γ_2 mit $\tilde{\gamma}_2(0) = \tilde{\gamma}_1(1)$. Wie man leicht nachrechnet, ist dann $\tilde{\gamma}_1 * \tilde{\gamma}_2$ die eindeutige Hochhebung von $\gamma_1 * \gamma_2$ mit Anfangspunkt e_0 . Also gilt:

$$(M_p([\gamma_2]_w \circ [\gamma_1]_w))(e_0) = M_p([\gamma_1 * \gamma_2]_w) = (\tilde{\gamma}_1 * \tilde{\gamma}_2)(1) = \tilde{\gamma}_2(1).$$

Andererseits ist

$$(M_p([\gamma_2]_w) \circ M_p([\gamma_1]_w))(e_0) = (M_p([\gamma_2]_w))(\tilde{\gamma}_1(1)) = \tilde{\gamma}_2(1).$$

Da alle Variablen beliebig gewählt waren, folgt daraus Eigenschaft (ii) eines kovarianten Funktors. $\square$

Bemerkung 8.23. Es lässt sich sogar zeigen, dass eine Überlagerung tatsächlich bis auf Isomorphismen von Überlagerungen (die wird im nächsten Abschnitt einführen) eindeutig durch ihren Fasertransportfunktor definiert ist. Grob gesagt ist die Überlagerung also durch die Gesamtheit ihrer Hochhebungen von wegen charakterisiert. Die Details dazu lassen sich in den Abschnitten 8.3 und 8.4 in Laures/Szymik, Grundkurs Topologie, nachlesen.

Definition 8.24. Sei X ein topologischer Raum, G eine topologische Gruppe und $e \in G$ ihr neutrales Element. Eine G -Rechtswirkung auf X ist eine stetige Abbildung

$$\rho : X \times G \rightarrow X,$$

für die gilt:

- (i) $\rho(x, e) = x$ für jedes $x \in X$,
- (ii) $\rho(x, gh) = \rho(\rho(x, g), h)$ für alle $g, h \in G$ und $x \in X$.

Bemerkung 8.25. In diesem Skript haben wir bisher der Einfachheit als G -Wirkung das verstanden, was häufig eine G -Linkswirkung genannt wird. G -Linkswirkungen und G -Rechtswirkungen lassen sich problemlos ineinander überführen. $\rho : X \times G \rightarrow X$ ist nämlich genau dann eine G -Rechtswirkung auf X , wenn $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto \rho(x, g^{-1})$ eine G -Wirkung ist.

Korollar 8.26. Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung und sei $x_0 \in X$. Dann ist

$$m_p : E_{x_0} \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow E_{x_0}, \quad m_p(e, [\alpha]_w) = \tilde{\alpha}_e(1),$$

wobei $\tilde{\alpha}_e$ die eindeutige Hochhebung von α mit $\tilde{\alpha}_e(0) = e$ bezeichne, eine $\pi_1(X, x_0)$ -Rechtswirkung auf E_{x_0} , die sogenannte Monodromiewirkung von p , wobei wir $\pi_1(X, x_0)$ und E_{x_0} mit den diskreten Topologien betrachten.

Beweis. Für die Stetigkeit der Wirkung gibt es nichts zu zeigen, da die Räume die diskreten Topologien tragen. Die Eigenschaften einer Rechtswirkung folgt aus den Funktoreigenschaften von M_p aus Satz/Definition 8.22, da wir m_p als

$$m_p : M_p(x_0) \times \text{Mor}_{\Pi(X)}(x_0, x_0) \rightarrow M_p(x_0), \quad m_p([\alpha]_w, e) = (M_p([\alpha]_w)(e),$$

umschreiben können. Die beiden Funktoreigenschaften liefern genau die beiden Eigenschaften einer Rechtswirkung.¹ $\square$

Im Folgenden werden wir stets die Schreibweise als Multiplikation mit „ $\cdot$ “ für die Monodromiewirkungen verwenden, wenn klar ist, welche Überlagerungen gemeint sind.

Definition 8.27. Sei G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum mit einer G -Rechtswirkung. Die Begriffe *Standgruppe*, *Bahn*, *transitiv*, sowie alle weiteren Begriffe aus Definition 5.14 werden für die G -Rechtswirkung völlig analog zu denen für G -Wirkungen aus Definition 5.14 definiert. So ist etwa für $x \in X$ die Standgruppe von x gegeben durch

$$G_x := \{g \in G \mid x \cdot g = x\}$$

und analog für die anderen Begriffe. Wie für G -Wirkungen heißt eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Räumen mit G -Rechtswirkungen G -äquivariant, wenn

$$f(x \cdot g) = f(x) \cdot g \quad \forall x \in X, g \in G.$$

Bemerkung 8.28. Man sieht leicht, dass sich die Standgruppe, Transitivität, ... einer G -Rechtswirkung sich alternativ als Standgruppe, Transitivität, ... der zugehörigen G -Wirkung definieren lassen, die in Bemerkung 8.25 beschrieben wurde.

¹Hierbei wird aus dem Funktor eine Rechtswirkung und keine Wirkung, da die Beziehung zwischen Multiplikation in $\pi_1(X, x_0)$ und Verkettung in $\Pi(X)$ durch $[\alpha]_w \cdot [\beta]_w = [\beta]_w \circ [\alpha]_w$ gegeben ist.

Satz 8.29. Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung und sei $x_0 \in X$.

a) Ist E wegzusammenhängend, so ist die Monodromiewirkung von p auf E_{x_0} transitiv.

b) Die Standgruppe der Monodromiewirkung in $e \in E_{x_0}$ ist gegeben durch

$$(\pi_1(X, x_0))_e = p_*(\pi_1(E, e)).$$

Beweis. a) Seien $e_1, e_2 \in E_{x_0}$ beliebig und sei $\gamma \in P(E, e_1, e_2)$. Dann ist $p \circ \gamma \in \Omega(X, x_0)$ und nach Konstruktion ist $e_1 \cdot [p \circ \gamma]_w = \gamma(1) = e_2$.

b) „ $\subset$ “ Setze $G := \pi_1(X, x_0)$ und sei $[\gamma]_w \in G_e$, so dass $e \cdot [\gamma]_w = e$. Ist $\tilde{\gamma}_e \in PE$ wieder die Hochhebung von γ bezüglich p mit $\tilde{\gamma}_e(0) = e$, so ist also $\tilde{\gamma}_e(1) = e$ und damit $\tilde{\gamma}_e \in \Omega(E, e)$. Nach Definition ist $p_*([\tilde{\gamma}_e]_w) = [p \circ \tilde{\gamma}_e]_w = [\gamma]_w$. Also ist $[\gamma]_w \in p_*(\pi_1(E, e))$.

„ $\supset$ “: Ist $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ so dass $[\alpha]_w \in p_*(\pi_1(E, e))$, so gibt es ein $\beta \in \Omega(E, e)$ mit $\alpha \simeq_w p \circ \beta$. Da β eine Hochhebung von $p \circ \beta$ mit $\beta(0) = e$ ist, folgt, dass

$$e \cdot [\alpha]_w = e \cdot [p \circ \beta]_w = \beta(1) = e.$$

Also ist $[\alpha]_w \in G_e$.

□

Mit den Eigenschaften der Monodromiewirkung aus Satz 8.29 können wir nun aus allgemeinen Resultaten über Gruppenwirkungen aus Abschnitt 5.2 eine interessante Folgerung über die Fasern der Überlagerung herleiten.

Satz 8.30. Sei E wegzusammenhängend und $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung. Für jedes $x_0 \in X$ und $e \in E_{x_0}$ gibt es eine Bijektion

$$\pi_1(X, x_0) / p_*(\pi_1(E, e)) \xrightarrow{1:1} E_{x_0}.$$

Beweis. Dies folgt durch Kombination von Satz 8.29 und Satz 5.33.

□

Inbesondere können wir die Blätterzahl von Überlagerungen mit endlichen Fasern nun mit Hilfe der Fundamentalgruppen herleiten.

Korollar 8.31. Sei E wegzusammenhängend und $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und $e \in E_{x_0}$. Falls $G := p_*(\pi_1(E, e))$ endlichen Index $|\pi_1(X, x_0) : G|$ in $\pi_1(X, x_0)$ hat, so ist $p : E \rightarrow X$ eine $|\pi_1(X, x_0) : G|$ -blättrige Überlagerung.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 8.30.

□

Die folgenden zwei Korollare erhalten wir als interessante Anwendungen der letzten Betrachtungen.

Korollar 8.32. Es ist $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}P^n$ und $n > 1$.

Beweis. Wir haben in Beispiel 8.3.(4) gesehen, dass es für $n > 1$ eine zweiblättrige Überlagerung $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ gibt. Da S^n für $n > 1$ einfach zusammenhängend ist, folgt aus Korollar 8.31, dass $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0)$ genau zwei Elemente hat. Da jede Gruppe mit zwei Elementen isomorph zu $\mathbb{Z}_2$ ist, folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 8.33. *Ist X einfach zusammenhängend und $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung, so ist p ein Homöomorphismus.*

Beweis. Nach Korollar 8.19 ist E ebenfalls einfach zusammenhängend. Nach Satz 8.30 enthält jede Faser von p genau ein Element, also ist p injektiv. Da p als Überlagerung stetig, surjektiv und lokaler Homöomorphismus ist, folgt, dass p ein Homöomorphismus ist. $\square$

8.4 Klassifikation von Überlagerungen I: Eindeutigkeit

In diesem und dem folgenden Abschnitt wollen wir Überlagerungen über einem festen topologischen Raum klassifizieren. Wir werden sehen, dass sich Überlagerungen mit den Untergruppen der Fundamentalgruppe des Raumes in Verbindung bringen lassen und werden damit eine algebraische Beschreibung der möglichen Überlagerungen des Raumes herleiten.

Um präziser zu formulieren, was wir mit Klassifikation meinen, führen wir zunächst die Kategorie der Überlagerungen über einem festen Raum ein.

Definition 8.34. Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren eine Kategorie $\text{Cov}(X)$, die *Kategorie der Überlagerungen von X* , durch²

- die Objekte von $\text{Cov}(X)$ sind alle Paare der Form (E, p) , wobei E ein topologischer Raum und $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung sei.
- Sind $p_1 : E_1 \rightarrow X$ und $p_2 : E_2 \rightarrow X$ Überlagerungen, so sei

$$\text{Mor}_{\text{Cov}(X)}((E_1, p_1), (E_2, p_2)) := \{f \in C^0(E_1, E_2) \mid p_2 \circ f = p_1\}.$$

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

Elemente von $\text{Mor}_{\text{Cov}(X)}((E_1, p_1), (E_2, p_2))$ nennen wir eine *Abbildung von Überlagerungen von p_1 nach p_2* .

- Die Verkettung sei die übliche Verkettung von Abbildungen, die Identitäten seien die üblichen Identitätsabbildungen.

²Cov steht hier für „covering“, das englische Wort für Überlagerung.

Man sieht leicht, dass $\text{Cov}(X)$ tatsächlich eine wohldefinierte Kategorie ist. Im folgenden Satz untersuchen wir zunächst Eigenschaften von Abbildungen von Überlagerungen.

Satz 8.35. *Sei X ein topologischer Raum und seien $p_1 : E_1 \rightarrow X$ und $p_2 : E_2 \rightarrow X$ Überlagerungen.*

- a) *Seien $f, g : E_1 \rightarrow E_2$ Abbildungen von Überlagerungen von p_1 nach p_2 . Falls E_1 zusammenhängend ist und es ein $e \in E_1$ gibt mit $f(e) = g(e)$, so ist $f = g$.*
- b) *Seien $e_1 \in E_1$ und $e_2 \in E_2$. Ist E_1 zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so gibt es genau dann eine Abbildung von Überlagerungen $f : E_1 \rightarrow E_2$ von p_1 nach p_2 mit $f(e_1) = e_2$, wenn*

$$(p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1)) \subset (p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2)).$$

- c) *Ist $f : E_1 \rightarrow E_2$ eine Abbildung von Überlagerungen von p_1 nach p_2 , so ist für jedes $x_0 \in X$ die Abbildung*

$$f|_{(E_1)_{x_0}} : (E_1)_{x_0} \rightarrow (E_2)_{x_0}$$

$\pi_1(X, x_0)$ -äquivariant bezüglich der Monodromiewirkungen.

- d) *Sind E_1 und E_2 wegzusammenhängend, so ist jede Abbildung von Überlagerungen $f : E_1 \rightarrow E_2$ von p_1 nach p_2 selbst eine Überlagerung.*

Beweis. a) Eine Abbildung von Überlagerungen von p_1 nach p_2 ist nach Konstruktion eine Hochhebung von p_1 bezüglich p_2 . Also folgt die Behauptung aus Satz 8.14.

- b) Dies folgt mit demselben Argument wie in a) aus Satz 8.20.

- c) Seien $e \in (E_1)_{x_0}$, $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ und $\tilde{\alpha}_e \in PE_1$ die eindeutige Hochhebung von α bezüglich p_1 mit $\tilde{\alpha}_e(0) = e$. Dann ist nach Konstruktion

$$f(e \cdot [\alpha]_w) = f(\tilde{\alpha}_e(1)) = (f \circ \tilde{\alpha}_e)(1),$$

Da f eine Abbildung von Überlagerungen ist, ist $f \circ \tilde{\alpha}_e$ eine Hochhebung von α bezüglich p_2 mit $(f \circ \tilde{\alpha}_e)(0) = f(e)$. Also gilt wegen der Eindeutigkeit von Hochhebungen von Wegen, dass

$$f(e) \cdot [\alpha]_w = (f \circ \tilde{\alpha}_e)(1),$$

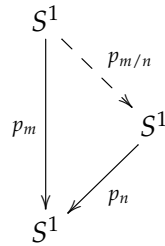
und damit $f(e \cdot [\alpha]_w) = f(e) \cdot [\alpha]_w$, was zu zeigen war.

- d) Wir wollen zunächst zeigen, dass f surjektiv ist. Sei $e_2 \in E_2$ beliebig und sei $x := p_2(e_2)$. Sei $e_1 \in (E_1)_x$ beliebig. Da die Monodromiewirkungen auf $(E_1)_x$ und $(E_2)_x$ nach Satz 8.29.a) transitiv sind, gibt es ein $g \in \pi_1(X, x)$, so dass $f(e_1) \cdot g = e_2$. Da $f|_{(E_1)_x}$ nach c) $\pi_1(X, x)$ -äquivariant ist, folgt $f(e_1 \cdot g) = e_2$, also liegt e_2 im Bild von f . Da e_2 beliebig gewählt war, folgt die Surjektivität von f .

Wir müssen nun eine Umgebung U von e_2 finden, so dass $f^{-1}(U)$ die Eigenschaften einer Überlagerung erfüllt. Seien U_1 und U_2 offene Umgebungen von x , so dass U_1

elementar bezüglich p_1 und U_2 elementar bezüglich p_2 ist. Ist V die Komponente von $U_1 \cap U_2$, die x enthält, so ist folglich V elementar bezüglich p_1 und p_2 . Sei nun $U \subset E_2$ die Komponente von $p_2^{-1}(V)$, die e_2 enthält. Als Komponente ist U offen und abgeschlossen in $p_2^{-1}(V)$. Da $f^{-1}(p_2^{-1}(V)) \subset p_1^{-1}(V)$ und es folgt, dass $f^{-1}(V)$ offen und abgeschlossen in $p_1^{-1}(V)$ ist. Da V elementar bezüglich p_1 ist, ist daher $f^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ für geeignetes I . Nach Konstruktion ist $p_1|_{V_i} : V_i \rightarrow V$ für jedes $i \in I$ ein Homöomorphismus, weiterhin ist $p_2|_U : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus. Da für $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ gilt, dass $f|_{V_i} = (p_2|_U)^{-1} \circ p_1|_{V_i}$, folgt daraus, dass f jedes V_i homöomorph auf U abbildet. Also ist f eine Überlagerung. $\square$

Beispiel 8.36. Wir betrachten die Überlagerungen $p_n : S^1 \rightarrow S^1$, $p_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Sei $\sigma := [\gamma]_w \in \pi_1(S^1, 1)$, wobei $\gamma \in \Omega(S^1, 1)$, $\gamma(s) = e^{2\pi i s}$. Wir hatten in Bemerkung 7.33 gesehen, dass $\pi_1(S^1, 1) = \langle \sigma \rangle$, dass also σ ein Erzeuger von $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ist. Man rechnet leicht nach (Übung), dass $(p_n)_*(\sigma) = \sigma^n$. Also ist $(p_n)_*(\pi_1(S^1, 1)) = \langle \sigma^n \rangle$ und mit Satz 8.4.b) folgt, dass es genau dann eine Abbildung von Überlagerungen $f : S^1 \rightarrow S^1$ von p_m nach p_n gibt, wenn m durch n teilbar ist. Verlangen wir zusätzlich, dass $f(1) = 1$, so folgt aus Satz 8.4.a), dass $f = p_{m/n}$ die eindeutige Abbildung mit den gewünschten Eigenschaften ist.



Definition 8.37. (1) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und seien A und B Objekte von $\mathcal{C}$. A und B heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus in $\mathcal{C}$ zwischen ihnen gibt. Setze

$$\text{Iso}_{\mathcal{C}}(A, B) := \{f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \mid f \text{ ist Isomorphismus}\}.$$

Setze

$$\text{Aut}_{\mathcal{C}}(A) := \text{Iso}_{\mathcal{C}}(A, A).$$

Die Elemente von $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(A)$ heißen *Automorphismen von A in $\mathcal{C}$* . Aus den Eigenschaften der Verkettung in einer Kategorie folgt, dass $(\text{Aut}_{\mathcal{C}}(A), \circ)$ für jedes Objekt A eine Gruppe ist.

(2) Seien $p_1 : E_1 \rightarrow X$ und $p_2 : E_2 \rightarrow X$ Überlagerungen. $f : E_1 \rightarrow E_2$ heißt *Isomorphismus von Überlagerungen von p_1 nach p_2* , wenn

$$f \in \text{Iso}_{\text{Cov}(X)}((E_1, p_1), (E_2, p_2)) = \{f \in C^0(E_1, E_2) \mid p_2 \circ f = p_1, f \text{ ist Homöomorphismus}\}.$$

p_1 und p_2 heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus von Überlagerungen von p_1 nach p_2 gibt, wenn also (E_1, p_1) und (E_2, p_2) in $\text{Cov}(X)$ isomorph sind.

Unser Ziel ist nun, die Menge der *Isomorphieklassen von Überlagerungen* bezüglich des gerade eingeführten Isomorphismusbegriffs zu bestimmen. Die Schlüsselrolle spielen dabei die von Überlagerungen induzierten Untergruppen der Fundamentalgruppe, denen wir in der folgenden Definition einen Namen geben.

Definition 8.38. Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung und $e \in E$. Die Untergruppe $p_*(\pi_1(E, e))$ von $\pi_1(X, p(e))$ heißt die *charakteristische Untergruppe von p in e* .

Bemerkung 8.39. Aus Korollar 8.19 folgt unmittelbar, dass $p_*(\pi_1(E, e))$ isomorph zu $\pi_1(E, e)$ ist, eine Voraussetzung für die Existenz einer Überlagerung $p : E \rightarrow X$ ist also, dass $\pi_1(E, e)$ für $e \in E$ isomorph zu einer Untergruppe von $\pi_1(X, p(e))$ ist.

Satz 8.40. Sei X ein topologischer Raum und seien $p_1 : E_1 \rightarrow X$ und $p_2 : E_2 \rightarrow X$ Überlagerungen, wobei E_1 und E_2 zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend seien. Seien $e_1 \in E_1$ und $e_2 \in E_2$ mit $p_1(e_1) = p_2(e_2)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Es gibt einen Isomorphismus von Überlagerungen $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ von p_1 nach p_2 mit $\varphi(e_1) = e_2$.
- (ii) $(p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2))$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Da $p_1 = p_2 \circ \varphi$, gilt für die induzierten Homomorphismen zwischen den Fundamentalgruppen, dass $(p_1)_* = (p_2)_* \circ \varphi_*$. Folglich ist

$$(p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1)) = (p_2)_*(\varphi_*(\pi_1(E_1, e_1))) \subset (p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2)).$$

Da φ Homöomorphismus ist, ist $(p_2)_* = (p_1)_* \circ \varphi_*^{-1}$ und völlig analog folgt, dass

$$(p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2)) \subset (p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1)),$$

womit (ii) gezeigt wäre.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nach Satz 8.35.b) gibt es Abbildungen von Überlagerungen $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ und $\psi : E_2 \rightarrow E_1$ mit $\varphi(e_1) = e_2$ und $\psi(e_2) = e_1$. Dann ist jedoch nach Konstruktion $\psi \circ \varphi$ eine Hochhebung von p bezüglich p mit $(\psi \circ \varphi)(e_1) = e_1$ und $\varphi \circ \psi$ eine Hochhebung von p' bezüglich p' mit $(\varphi \circ \psi)(e_2) = e_2$.

$$\begin{array}{ccc} & E_1 & \\ \psi \circ \varphi \nearrow & & \downarrow p_1 \\ E_1 & \xrightarrow{p_1} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & E_2 & \\ \varphi \circ \psi \nearrow & & \downarrow p_2 \\ E_2 & \xrightarrow{p_2} & X \end{array}$$

Andererseits ist klar, dass id_{E_1} eine Hochhebung von p_1 bezüglich p_1 mit $\text{id}_{E_1}(e_1) = e_1$ und id_{E_2} eine Hochhebung von p_2 bezüglich p_2 mit $\text{id}_{E_2}(e_2) = e_2$ ist.

Da E und E' zusammenhängend sind, folgt wegen der Eindeutigkeit von Hochhebungen aus Satz 8.14, dass $\psi \circ \varphi = \text{id}_{E_1}$ und $\varphi \circ \psi = \text{id}_{E_2}$, also ist φ ein Homöomorphismus. $\square$

Aus dem letzten Satz können wir nun folgenden Satz herleiten, der sich von Satz 8.40 dadurch unterscheidet, dass der Isomorphismus keine Basispunkte erhalten muss.

Satz 8.41. *Unter den Voraussetzungen von Satz 8.40 sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) *Es gibt einen Isomorphismus von Überlagerungen $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$.*
- (ii) *$(p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1))$ und $(p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2))$ sind konjugierte Untergruppen von $\pi_1(X, p_1(e_1))$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $x_0 := p_1(e_1) = p_2(e_2)$ und $e'_1 := \varphi(e_1)$. Da φ Homöomorphismus ist, induziert φ nach Satz 7.10 einen Isomorphismus $\varphi_* : \pi_1(E_1, e_1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(E_2, e'_1)$. Damit gilt insbesondere, dass

$$(p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1)) = (p_2)_*(\varphi_*(\pi_1(E_1, e_1))) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, e'_1)),$$

es ist also zu zeigen, dass $(p_2)_*(\pi_1(E_2, e'_1))$ und $(p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2))$ konjugierte Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ sind.

Nach Voraussetzung ist E_2 wegzusammenhängend, wähle daher ein $\gamma \in P(E_2, e_2, e'_1)$. Mit der Konstruktion aus Satz 7.6 erhalten wir einen Gruppenisomorphismus

$$\ell_\gamma : \pi_1(E_2, e_2) \rightarrow \pi_1(E_2, e'_1).$$

Setzen wir $\beta := p_2 \circ \gamma \in PX$, so ist $\beta(1) = p_2(e'_1) = x_0$, also $\beta \in \Omega(X, x_0)$. Wenden wir die Konstruktion auf β an, so erhalten wir folgendes kommutative Diagramm von Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E_2, e_2) & \xrightarrow[\cong]{\ell_\gamma} & \pi_1(E_2, e'_1) \\ (p_2)_* \downarrow & & \downarrow (p_2)_* \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow[\cong]{\ell_\beta} & \pi_1(X, x_0). \end{array}$$

Es ist also $\ell_\beta((p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2))) = \pi_1(E_2, e'_1)$ und da ℓ_β gerade die Konjugation mit $[\beta]_w$ ist, folgt die Behauptung.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\alpha \in \Omega(X, x_0)$, so dass

$$(p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1)) = [\alpha]_w^{-1} \cdot (p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2)) \cdot [\alpha]_w = \ell_\alpha((p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2))).$$

Nach Satz 8.15 gibt es eine Hochhebung $\tilde{\alpha} \in PE_1$ von α bezüglich p_1 mit $\tilde{\alpha}(0) = e_1$. Setze $e'_1 := \tilde{\alpha}(1)$. Dann ist analog zum vorigen Schritt

$$(p_2)_*(\pi_1(E_2, e'_1)) = (p_2)_*(\ell_{\tilde{\alpha}}(\pi_1(E_2, e_2))) = \ell_\alpha((p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2))) = (p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1)).$$

Also gibt es nach Satz 8.40 einen Isomorphismus von Überlagerungen $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$. $\square$

8.5 Klassifikation von Überlagerungen II: Existenz

Im letzten Abschnitt haben gesehen, dass die Konjugationsklasse der charakteristischen Untergruppe eine Überlagerung bis auf Isomorphie eindeutig definiert. In diesem Abschnitt wollen wir nun andersherum fragen: Gegeben eine Konjugationsklasse von Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$, gibt es eine Überlagerung von X , deren charakteristische Untergruppe in dieser Konjugationsklasse liegt?

Wir beginnen mit der einfachstmöglichen Untergruppe, nämlich der trivialen.

Definition 8.42. Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ heißt *universelle Überlagerung von X* , wenn $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist.

Der Name „universell“ ist durch folgenden Satz begründet, der zeigt, dass eine universelle Überlagerung jede andere Überlagerung des Raumes ebenfalls überlagert.

Satz 8.43. Sei X ein topologischer Raum, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung von X und $p' : E \rightarrow X$ eine beliebige Überlagerung von X . Dann gibt es eine Überlagerung $q : \tilde{X} \rightarrow E$, so dass $p = p' \circ q$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 8.35.b) und d), da $p_*(\pi_1(\tilde{X}, x)) = \{1\}$ für jedes $x \in \tilde{X}$, welches offensichtlich in jeder charakteristischen Untergruppe einer Überlagerung von X enthalten ist. $\square$

Man stellt fest, dass es eine notwendige Zusammenhangsbedingung an X gibt, die erfüllt sein muss, damit X eine universelle Überlagerung besitzt, wie wir gleich sehen werden.

Definition 8.44. Ein topologischer Raum X heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass jedes $\alpha \in \Omega(U, x)$ in X nullhomotop ist.

Bemerkung 8.45. Alternativ formuliert ist X semilokal einfach zusammenhängend, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass die von der Inklusion $j : U \hookrightarrow X$ induzierte Abbildung $j_* : \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ trivial ist, also $j_*(\sigma) = 1$ für alle $\sigma \in \pi_1(U, x)$.

Beispiel 8.46. (1) Jedes offene $U \subset \mathbb{R}^n$ ist semilokal einfach zusammenhängend: wähle für $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$. Dann ist jede in $B_\varepsilon(x)$ liegende Schleife nullhomotop.

(2) Ein Beispiel für einen Raum, der *nicht* semilokal einfach zusammenhängend ist, ist der „Hawaiianische Ohrring“:

$$H := \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial B_{1/n}^2(\tfrac{1}{n}, 0),$$

also die Vereinigung der Kreislinien um $(1/n, 0)$ mit Radius $\frac{1}{n}$. Dann hat $(0, 0)$ keine Umgebung, die in H einfach zusammenhängend ist, da jede Umgebung von U eine

Schleife in $(0,0)$ enthält, die eines der $\partial B_{1/n}^2$ parametrisiert und deshalb in H nicht nullhomotop ist.

Satz 8.47. *Ist X ein topologischer Raum und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung von X , so ist X semilokal einfach zusammenhängend.*

Beweis. Sei $x \in X$ und $U \subset X$ eine elementare Umgebung von x bezüglich p . Wähle $V \subset p^{-1}(U)$, so dass $p|_V : V \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist. Für $\alpha \in \Omega(U, x)$ erhalten wir dann $\tilde{\alpha} := (p|_V)^{-1} \circ \alpha \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x})$ für geeignetes $\tilde{x} \in V$. Nach Voraussetzung ist $\tilde{\alpha}$ nullhomotop in $\tilde{X}$. Ist $H : [0,1]^2 \rightarrow \tilde{X}$ Weghomotopie von $\tilde{\alpha}$ nach $c_{\tilde{x}}$, so ist $p \circ H$ eine Weghomotopie von α nach c_x , also ist α in X nullhomotop. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Um die Notation kurz zu halten, bündeln wir die bei den Klassifikationssätzen für Überlagerungen benötigten Zusammenhangseigenschaften in einem Begriff.

Definition 8.48. Wir nennen einen topologischen Raum *hinreichend zusammenhängend*, wenn er zusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend ist.

Man beachte, dass viele „schöne“ Räume, wie etwa Sphären und Tori (oder allgemeiner zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten) hinreichend zusammenhängend sind.

Satz 8.49. *Jeder hinreichend zusammenhängende Raum X besitzt eine universelle Überlagerung. Zwei universelle Überlagerungen von X sind stets isomorph.*

Beweis. Die Isomorphieaussage folgt unmittelbar aus Satz 8.41, es ist also nur die Existenz zu zeigen. Zur Vereinfachung werden wir in diesem Beweis die Weghomotopieklasse eines Weges γ mit $[\gamma]$ statt mit $[\gamma]_w$ bezeichnen.

Im Folgenden nennen wir eine Umgebung U von $x \in X$ eine *s-Umgebung*, wenn sie wegzusammenhängend ist jede Schleife in x , die vollständig in U liegt, in X nullhomotop ist. Da X lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend ist, besitzt jeder Punkt in X eine s-Umgebung.

Sei nun $x_0 \in X$ fest gewählt und definiere

$$\tilde{X} := \{\gamma \in PX \mid \gamma(0) = x_0\} / \simeq_w, \quad p : \tilde{X} \rightarrow X, \quad p([\gamma]) = \gamma(1).$$

Da X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und damit insbesondere nach Satz 3.26 wegzusammenhängend ist, ist p surjektiv. Wir wollen nun in mehreren Schritten eine Topologie auf $\tilde{X}$ definieren und zeigen, dass p bezüglich dieser Topologie eine universelle Überlagerung ist.

Schritt 1: Konstruiere eine Topologie auf $\tilde{X}$.

Für $U \subset X$ offen und $\gamma \in PX$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) \in U$ sei

$$A([\gamma], U) := \left\{ [\gamma * \beta] \in \tilde{X} \mid \beta \in PU, \beta(0) = \gamma(1) \right\} \subset \tilde{X}.$$

Sei nun

$$\mathcal{S} := \{A([\gamma], U) \mid \gamma \in PX, \gamma(0) = x_0, U \text{ ist s-Umgebung von } \gamma(1)\}.$$

Wie man leicht sieht, ist $\tilde{X} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$. Sei daher $\tilde{X}$ mit der von $\mathcal{S}$ (als Subbasis) erzeugten Topologie versehen (siehe Satz/Definition 2.15).

Schritt 2: $\tilde{X}$ ist wegzusammenhängend.

Sei $\tilde{x}_0 := [c_{x_0}] \in \tilde{X}$ und sei $\alpha \in PX$ mit $\alpha(0) = x_0$. Für $t \in [0, 1]$ sei

$$\alpha_t \in PX, \quad \alpha_t(s) = \alpha(ts).$$

Definiere dann $f : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$, $f(t) := [\alpha_t]$. Nach Definition ist klar, dass $f(0) = \tilde{x}_0$ und $f(1) = [\alpha]$. Es bleibt zu zeigen, dass f stetig ist, wozu es nach Satz 2.17 reicht zu zeigen, dass $f^{-1}(A([\gamma], U))$ offen ist für jedes $A([\gamma], U) \in \mathcal{S}$. Ist $t_0 \in [0, 1]$ mit $f(t_0) \in A([\gamma], U)$, so ist $p(f(t_0)) = \alpha(t_0) \in U$, also gibt es wegen der Stetigkeit von α ein $\delta > 0$ mit $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \alpha^{-1}(U)$.

Nach Definition von $A([\gamma], U)$ gibt es $\beta \in PU$ mit $\alpha_{t_0} \simeq_w \gamma * \beta$. Sei nun für $t \in [0, 1]$ $\alpha'_t \in PX$ gegeben durch

$$\alpha'_t(s) = \alpha(t_0 + s(t - t_0)).$$

Da α'_t eine Umparametrisierung von $\alpha|_{[t_0, t]}$ bzw. von $\alpha|_{[t, t_0]}$ ist (falls $t < t_0$), rechnet man leicht nach, dass

$$\alpha_t \simeq_w \alpha_{t_0} * \alpha'_t \simeq_w (\gamma * \beta) * \alpha'_t \simeq_w \gamma * (\beta * \alpha'_t)$$

Ist nun $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, so ist $\alpha'_t \in PU$, also folgt

$$f(t) = [\alpha_t] = [\gamma * (\beta * \alpha'_t)] \in A([\gamma], U).$$

Also ist $f^{-1}(A([\gamma], U))$ offen und es folgt die Stetigkeit von f . Damit haben wir zu jedem $[\beta] \in \tilde{X}$ einen Weg von $\tilde{x}$ nach $[\beta]$ gefunden, woraus folgt, dass $\tilde{X}$ wegzusammenhängend ist.

Schritt 3: Für jedes $x_1 \in X$ und jede s-Umgebung U von x_1 ist

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{[\gamma] \in W(x_0, x_1)} A([\gamma], U),$$

wobei $W(x_0, x_1) = P(X, x_0, x_1) / \simeq_w$.

„ $\supset$ “: Nach Definition von p ist klar, dass $p(A([\gamma], U)) \subset U$ für jedes solche $A([\gamma], U)$, also ist $\bigcup_{[\gamma] \in \tilde{X}} A([\gamma], U) \subset p^{-1}(U)$.

„ $\subset$ “: Sei $[\alpha] \in p^{-1}(U)$, so dass $\alpha(1) \in U$. Da U wegzusammenhängend ist, gibt es ein $\beta \in P(U, \alpha(1), x_1)$, also ist

$$[\alpha] = [(\alpha * \beta) * \tilde{\beta}] \in A([\alpha * \beta], U) \in \bigcup_{[\gamma] \in W(x_0, x_1)} A([\gamma], U).$$

Schritt 4: Für $x_1 \in X$, U eine s-Umgebung von x_1 und $\gamma_1, \gamma_2 \in P(x_0, x_1)$ gilt:

$$A([\gamma_1], U) \cap A([\gamma_2], U) \neq \emptyset \Rightarrow A([\gamma_1], U) = A([\gamma_2], U).$$

Sei $\alpha \in PX$ mit $\alpha(0) = x_0$ und $[\alpha] \in A([\gamma_1], U) \cap A([\gamma_2], U)$. Dann gibt es $\beta_1, \beta_2 \in PU$, so dass $\gamma_1 * \beta_1 \simeq_w \alpha \simeq_w \gamma_2 * \beta_2$. Mit den üblichen Eigenschaften von Weghomotopien folgt, dass

$$\gamma_1 \simeq_w (\gamma_1 * \beta_1) * \bar{\beta}_1 \simeq_w (\gamma_2 * \beta_2) * \bar{\beta}_1 \simeq_w \gamma_2 * (\beta_2 * \bar{\beta}_1).$$

Da $\beta_1(0) = \beta_2(0) = x_1$ und $\beta_1(1) = \beta_2(1) = \alpha(1)$, ist $\beta_2 * \bar{\beta}_1 \in \Omega(U, x_1)$. Also ist $\beta_2 * \bar{\beta}_1 \simeq_w c_{x_1}$, da U eine s-Umgebung ist. Es folgt, dass $[\gamma_1] = [\gamma_2]$, woraus man leicht folgert, dass $A([\gamma_1], U) = A([\gamma_2], U)$.

Schritt 5: $p : \tilde{X} \rightarrow X$ ist eine Überlagerung.

Aus Schritt 3 folgt insbesondere, dass p stetig ist. Aus den Schritten 3 und 4 folgt, dass für jedes $x_1 \in X$ und jede s-Umgebung U von x_1 gilt, dass

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\gamma] \in W'} A([\gamma], U)$$

für geeignetes $W' \subset W(x_0, x_1)$. Es reicht also zu zeigen, dass jedes der $A([\gamma], U)$ von p homöomorph auf U abgebildet wird. Wähle solch ein $A([\gamma], U)$ und setze

$$p_0 := p|_{A([\gamma], U)} : A([\gamma], U) \rightarrow U.$$

Ist $x \in U$ beliebig, so gibt es, da U wegzusammenhängend ist, ein $\beta \in P(U, \gamma(1), x)$. Dann ist $p_0([\gamma * \beta]) = x$, also ist p_0 surjektiv.

Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in PX$, so dass $[\alpha_1], [\alpha_2] \in A([\gamma], U)$ mit $p_0([\alpha_1]) = p_0([\alpha_2])$, also $\alpha_1(1) = \alpha_2(1) =: x_1$, so gibt $\beta_1, \beta_2 \in P(U, \gamma(1), x_1)$, so dass $[\alpha_1] = [\gamma * \beta_1]$ und $[\alpha_2] = [\gamma * \beta_2]$. Mit den üblichen Eigenschaften von Weghomotopien folgt

$$\alpha_1 \simeq_w \gamma * \beta_1 \simeq_w \gamma * (\beta_2 * \bar{\beta}_2) * \beta_1 \simeq_w (\gamma * \beta_2) * (\bar{\beta}_2 * \beta_1) \simeq_w \alpha_2 * (\bar{\beta}_2 * \beta_1).$$

Da U eine s-Umgebung ist, folgt analog zu Schritt 3, dass $\beta_2 * \bar{\beta}_2 \simeq_w c_{x_1}$ und damit, dass $[\alpha_1] = [\alpha_2]$. Folglich ist p_0 injektiv.

Da p_0 bijektiv ist und, wie wir indirekt gesehen haben, Mengen aus der Subbasis $\mathcal{S}$ auf offene Mengen abbilden, folgt (Übung), dass p_0 eine offene Abbildung ist. Also ist p_0 ein Homöomorphismus und es folgt, dass p eine Überlagerung ist.

Schritt 6: $\tilde{X}$ ist lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend.

Der lokale Wegzusammenhang von $\tilde{X}$ folgt leicht aus dem lokalen Wegzusammenhang von X und der Überlagerungseigenschaft von p (Übung).

Sei $\tilde{\alpha} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ und sei $\alpha := p \circ \tilde{\alpha} \in \Omega(X, x_0)$. Dann ist $\tilde{\alpha}$ eine Hochhebung von α bezüglich der Überlagerung p mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$.

Ist jedoch für dieses α die Abbildung $f \in PX$ definiert wie in Schritt 2, so ist nach Konstruktion $(p \circ f)(t) = \alpha(t)$ und $f(0) = [c_{x_0}] = \tilde{x}_0$. Also ist nach der Eindeutigkeit von Hochhebungen von Wegen $f = \tilde{\alpha}$. Da $\tilde{\alpha}$ eine Schleife ist, ist folglich auch f eine Schleife, so dass

$$\tilde{x}_0 = [c_{x_0}] = f(0) = f(1) = [\alpha].$$

Also ist $\alpha \simeq_w c_{x_0}$ und mit dem Monodromiesatz folgt, dass $\tilde{\alpha} \simeq_w c_{\tilde{x}_0}$. Folglich ist $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend und damit $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung. $\square$

Nachdem wir die Frage nach der Existenz universeller Überlagerungen für hinreichend zusammenhängende Räume nun beantwortet haben, stellt sich nun die allgemeinere Frage, welchen Untergruppen wir analog Überlagerungen zuweisen können. Der folgende Satz zeigt, dass dies tatsächlich für *jede* Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$ möglich ist, was wir mit Hilfe der im Beweis von Satz 8.49 konstruierten Überlagerung zeigen werden.

Satz 8.50. *Sei X hinreichend zusammenhängend und $x_0 \in X$. Dann gibt es für jede Untergruppe $G \subset \pi_1(X, x_0)$ eine Überlagerung $p : E \rightarrow X$ von X , so dass E wegzusammenhängend ist und so dass $G = p_*(\pi_1(E, e_0))$ für ein $e_0 \in E_{x_0}$.*

Beweis. Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ die im Beweis zu Satz 8.49 konstruierte universelle Überlagerung, es sei also

$$\tilde{X} = \{\gamma \in PX \mid \gamma(0) = x_0\} / \simeq_w, \quad p([\gamma]) = \gamma(1),$$

wobei $\tilde{X}$ mit der beschriebenen Topologie versehen sei. (Hierbei schreiben wir wieder $[\cdot]$ statt $[\cdot]_w$ für die Weghomotopieklassen.) Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $\tilde{X}$, indem für je zwei $\gamma_1, \gamma_2 \in PX$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_0$ gelten soll:

$$[\gamma_1] \sim_G [\gamma_2] \quad :\Leftrightarrow \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(1) \quad \text{und} \quad [\gamma_1 * \bar{\gamma}_2] \in G.$$

Man rechnet leicht nach, dass $\sim_G$ eine Äquivalenzrelation auf $\tilde{X}$ definiert, da G eine Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$ ist: die Reflexivität von $\sim_G$ folgt, da $1 \in G$, die Symmetrie, da inverse von Elementen aus G wieder in G liegen, und die Transitivität von $\sim_G$ daraus, dass Produkte von Elementen aus G wieder in G liegen. Wir setzen nun $E := \tilde{X} / \sim_G$, versehen E mit der Quotiententopologie und bezeichnen mit $\pi : \tilde{X} \rightarrow E$ die kanonische Projektion. Nach Definition ist klar, dass $p([\gamma_1]) = p([\gamma_2])$ gilt, wenn $[\gamma_1] \sim_G [\gamma_2]$, also induziert p nach Korollar 2.29 eine stetige Abbildung $q : E \rightarrow X$ mit $p = q \circ \pi$.

Wir wollen zeigen, dass q eine Überlagerung mit charakteristischer Untergruppe G ist. Seien zunächst $\gamma_1, \gamma_2 \in PX$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_0$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, also $p([\gamma_1]) = p([\gamma_2])$, und sei $U \subset X$ eine s -Umgebung von $\gamma_1(1)$.

Behauptung: Falls es $[\alpha_1] \in A([\gamma_1], U)$ und $[\alpha_2] \in A([\gamma_2], U)$ gibt, so dass $\pi([\alpha_1]) = \pi([\alpha_2])$, so gilt $\pi(A([\gamma_1], U)) = \pi(A([\gamma_2], U))$.

Beweis der Behauptung. Seien $\beta_1, \beta_2 \in PU$ mit $\alpha_1 \simeq_w \gamma_1 * \beta_1$ und $\alpha_2 \simeq_w \gamma_2 * \beta_2$. Ist $\pi([\alpha_1]) = \pi([\alpha_2])$, so gilt $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ und $[\alpha_1 * \bar{\alpha}_2] \in G$. Berechne, dass

$$[\alpha_1 * \bar{\alpha}_2] = [(\gamma_1 * \beta_1) * (\overline{\gamma_2 * \beta_2})] = [\gamma_1 * (\beta_1 * \bar{\beta}_2) * \bar{\gamma}_2].$$

(Hierbei haben wir die einfach zu sehende Tatsache benutzt, dass $\overline{f * g} = \bar{g} * \bar{f}$ für je zwei $f, g \in PX$ mit $f(1) = g(0)$.) Da $\beta_1 * \bar{\beta}_2$ eine Schleife in U ist, ist sie in X nullhomotop und es folgt

$$[\gamma_1 * \bar{\gamma}_2] = [\alpha_1 * \bar{\alpha}_2] \in G$$

und damit $\pi([\gamma_1]) = \pi([\gamma_2])$. Für jedes $f \in PU$ mit $f(0) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ folgt daraus, dass

$$[(\gamma_1 * f) * (\overline{\gamma_2 * f})] = [\gamma_1 * (f * \bar{f}) * \bar{\gamma}_2] = [\gamma_1 * \bar{\gamma}_2] \in G,$$

also $\pi([\gamma_1 * f]) = \pi([\gamma_2 * f])$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Wie wir im Beweis von Satz 8.49 gesehen hatten, ist

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\gamma] \in W(x_0, x_1)} A([\gamma], U).$$

Aus der Behauptung folgt nun, dass es ein geeignetes $W' \subset W(x_0, x_1)$ gibt, so dass

$$q^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\gamma] \in W'} \pi(A([\gamma], U))$$

und aus der Überlagerungseigenschaft von p folgt, dass q jedes $\pi(A([\gamma], U))$ homöomorph auf U abbildet. Da jeder Punkt eine solche s -Umgebung besitzt, ist q eine Überlagerung.

Sei nun $e_0 := \pi([c_{x_0}]) \in E$. Um die charakteristische Untergruppe von q in e_0 zu bestimmen, müssen wir untersuchen, welche Klassen in $\pi_1(X, x_0)$ durch Bilder von Schleifen in E repräsentiert werden.

Sei $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ beliebig und sei $\tilde{\alpha} \in P\tilde{X}$ die eindeutige Hochhebung von α bezüglich p mit $\tilde{\alpha}(0) = [c_{x_0}]$ und nach Definition von p ist $\tilde{\alpha}(1) = [\alpha]$. Nach Konstruktion ist $\beta := \pi \circ \tilde{\alpha} \in PE$ die eindeutige Hochhebung von α bezüglich q mit $\beta(0) = \pi(\tilde{\alpha}(0)) = e_0$. β ist genau dann eine Schleife, wenn $\pi(\tilde{\alpha}(1)) = e_0$, also $[\alpha] \sim_G [c_{x_0}]$, was äquivalent zu $\alpha \in G$ ist. Also ist $q_*(\pi_1(E, e_0)) = G$, so dass q tatsächlich die gesuchte Überlagerung ist. □

Fassen wir nun die Resultate aus diesem und dem vorherigen Abschnitt zusammen, so erhalten wir folgenden allgemeinen Klassifikationssatz für Überlagerungen.

Satz 8.51. *Ist X ein hinreichend zusammenhängender Raum, so induziert die Zuordnung der charakteristischen Untergruppe zu einer Überlagerung eine Bijektion*

$$\{\text{Isomorphieklassen wegzusammenhängender Überlagerungen von } X\} \xrightarrow{1:1} \{\text{Konjugationsklassen von Untergruppen von } \pi_1(X, x_0)\}.$$

Beispiel 8.52. (1) Mit diesem Wissen können wir nun die Überlagerungen von S^1 vollständig klassifizieren. Aus der Algebra wissen wir, dass jede nichttriviale Untergruppe von $\pi_1(S^1, 1) = \langle \sigma \rangle$ von der Form $G_n := \langle \sigma^n \rangle$ für $n \in \mathbb{N}$ ist. Jedes G_n bildet eine eigene Konjugationsklasse. Weiterhin haben wir in Beispiel 8.36 gesehen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Überlagerung mit charakteristischer Untergruppe G_n gegeben ist durch $p_n(z) = z^n$. Weiterhin ist $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\varphi(s) = e^{2\pi i s}$, eine universelle Überlagerung von S^1 . Also folgt aus Satz 8.50: Jede Überlagerung von S^1 ist isomorph zu einer der Überlagerungen

$$p_n : S^1 \rightarrow S^1, \quad p_n(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad \varphi(s) = e^{2\pi i s}.$$

(Falls sich jemand wundert, wo die Überlagerungen $p_{-n}(z) = z^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$ geblieben sind: für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$, $\varphi(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}$, ein Isomorphismus von Überlagerungen von p_n nach p_{-n} .)

(2) Jede Überlagerung von $\mathbb{R}P^n$, $n > 1$, ist entweder ein Homöomorphismus oder isomorph zu $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $f(x) = \mathbb{R}x$. Dies folgt aus Satz 8.50, Korollar 8.32 und Korollar 8.33, da $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ nur $\mathbb{Z}_2$ und $\{1\}$ als Untergruppen hat.

8.6 Deckbewegungsgruppen

Nachdem wir uns ausführlich mit Isomorphismen von Überlagerungen beschäftigt haben, wollen wir uns in diesem Abschnitt die *Automorphismen* von Überlagerungen anschauen, d.h. die Isomorphismen von einer Überlagerung zu sich selbst. Wir werden sehen, dass auch diese Isomorphismen eng mit der Fundamentalgruppe verbunden sind und die charakteristische Untergruppe einer Überlagerung eine sehr wichtige Rolle dabei spielt. Schließlich werden wir die Resultate anwenden, um die Fundamentalgruppen von Bahnräumen eigentlich diskontinuierlicher Gruppenwirkungen zu bestimmen.

Definition 8.53. Ist $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung, so ist die *Deckbewegungsgruppe* von p gegeben als die Automorphismengruppe

$$D(E, p) := \text{Aut}_{\text{Cov}(X)}(E, p) = \{f : E \rightarrow E \mid f \text{ ist Homöomorphismus mit } p \circ f = p\},$$

versehen mit der Verkettung von Abbildungen als Gruppenoperation. Elemente von $D(E, p)$ heißen *Deckbewegungen* von E .

Bemerkung 8.54. Man beachte, dass für jede Deckbewegung $f : E \rightarrow E$ insbesondere gilt, dass $f(E_x) \subset E_x$ für alle $x \in X$, dass sich f also für jedes $x \in X$ zu einer Abbildung $f_x : E_x \rightarrow E_x$ einschränken lässt.

Bevor wir die Eigenschaften der Deckbewegungsgruppe untersuchen, schauen wir uns eine Klasse von Überlagerungen an

Satz 8.55. Sei G eine diskrete Gruppe und X ein zusammenhängender Raum mit einer eigentlich diskontinuierlichen G -Wirkung. Dann gilt für die Überlagerung $p : X \rightarrow X/G$, dass

$$D(X, p) \cong G.$$

Beweis. In Satz 8.6 haben wir gesehen, dass $p : X \rightarrow X/G$ eine wohldefinierte Überlagerung ist. Nach Definition gilt für jedes $g \in G$, dass $p \circ \ell_g = p$, wobei wieder $\ell_g : X \rightarrow X$, $\ell_g(x) = g \cdot x$. Also ist $\{\ell_g \mid g \in G\} \subset D(X, p)$ und es ist leicht zu sehen, dass $\Phi : G \rightarrow D(X, p)$, $\Phi(g) = \ell_g$, ein Gruppenhomomorphismus ist. Sind $g, h \in G$ mit $\Phi(g) = \Phi(h)$, also $\ell_g = \ell_h$, so würde insbesondere für jedes offene $U \subset X$ gelten, dass $\ell_g(U) \cap \ell_h(U) \neq \emptyset$, also

$$(g \cdot U) \cap (h \cdot U) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad (h^{-1}g) \cdot U \cap U \neq \emptyset.$$

Da die G -Wirkung jedoch eigentlich diskontinuierlich ist, folgt daraus, dass $h^{-1}g = e$, also $g = h$. Folglich ist Φ injektiv.

Ist $f \in D(X, p)$ und $x \in X$, so gilt insbesondere, dass $p(f(x)) = p(x)$. Nach Definition von p bedeutet dies jedoch, dass es ein $g \in G$ gibt mit $f(x) = g \cdot x = \ell_g(x)$. Dann folgt jedoch aus Satz 8.35.a), dass $f = \ell_g = \Phi(g)$, also ist Φ surjektiv. $\square$

Nun schauen wir uns Eigenschaften von Deckbewegungen an.

Satz 8.56. *Sei E zusammenhängend und $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung.*

a) *Ist $D(E, p)$ mit der diskreten Topologie versehen, so ist*

$$D(E, p) \times E \rightarrow E, \quad (f, e) \mapsto f(e),$$

eine freie und eigentlich diskontinuierliche $D(E, p)$ -Wirkung auf E .

b) *Seien $e_1, e_2 \in E$ mit $p(e_1) = p(e_2)$. Ist E lokal wegzusammenhängend, so gibt es genau dann ein $f \in D(E, p)$ mit $f(e_1) = e_2$, wenn $p_*(\pi_1(E, e_1)) = p_*(\pi_1(E, e_2))$.*

Beweis. a) Setze $G := D(E, p)$. Man rechnet leicht nach, dass die Eigenschaften einer G -Wirkung erfüllt sind. Sei $e \in E$ und $f \in G_e$, es gelte also $f(e) = e$. Da E zusammenhängend und f insbesondere eine Abbildung von Überlagerungen von p nach p ist, folgt aus Satz 8.35.a), dass $f = \text{id}_E$, da id_E dieselbe Eigenschaft hat. Also ist die Wirkung frei.

Sei $U \subset X$ elementar bezüglich p und sei $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$, wobei jedes V_i von p homöomorph auf U abgebildet wird. Wähle ein festes V_{i_0} . Sei $f \in D(E, p)$ und $e \in V_{i_0}$, so dass $f(e) \in V_{i_0}$. Da $f \in D(E, p)$, ist dann $p(f(e)) = p(e)$. Da $p|_{V_{i_0}} : V_{i_0} \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist, folgt $f(e) = e$, was nur für $f = \text{id}_E$ erfüllt sein kann, da wir bereits gesehen haben, dass die Wirkung frei ist. Also ist $f(V_{i_0}) \cap V_{i_0} = \emptyset$ für alle $f \in D(E, p) \setminus \{\text{id}_E\}$. Da jedes $e \in E$ eine Umgebung dieser Form besitzt, folgt, dass die Wirkung eigentlich diskontinuierlich ist.

b) Dies folgt unmittelbar aus Satz 8.40. $\square$

Als Nächstes führen wir eine Klasse von Überlagerungen ein, für die sich Deckbewegungsgruppen besonders natürlich verhalten, wie wir im Folgenden sehen werden.

Definition 8.57. Eine Überlagerung $p : E \rightarrow X$ heißt *normal* oder *regulär*, wenn $p_*(\pi_1(E, e))$ für ein $e \in E$ eine normale Untergruppe von $\pi_1(X, p(e))$ ist.

Um normale Überlagerungen und Deckbewegungsgruppen zusammenzubringen, führen wir zunächst ein kleines technisches Lemma ein.

Lemma 8.58. Sei G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum mit einer G -Rechtswirkung. Für die Standgruppen der Rechtswirkung gilt, dass

$$gG_x \cdot g^{-1} = G_x \quad \forall x \in X, g \in G.$$

Beweis. Nach den Eigenschaften einer Rechtswirkung ist

$$\begin{aligned} G_{x \cdot g} &= \{h \in G \mid (x \cdot g) \cdot h = x \cdot g\} \\ &= \{h \in G \mid x \cdot gh = x \cdot g\} \\ &= \{h \in G \mid x \cdot ghg^{-1} = x \cdot gg^{-1} = x\} \\ &= \{h \in G \mid ghg^{-1} \in G_x\} = g^{-1}G_xg, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt. □

Das vorangegangene Lemma werden wir im Beweis des folgenden Satzes auf die Monodromiewirkung anwenden.

Satz 8.59. Sei E wegzusammenhängend und $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung.

- a) Sind $e_1, e_2 \in E$ mit $p(e_1) = p(e_2)$, so sind $p_*(\pi_1(E, e_1))$ und $p_*(\pi_1(E, e_2))$ konjugierte Untergruppen von $\pi_1(X, p(e_1))$.
- b) Ist p normal, so gilt für alle $e_1, e_2 \in E$ mit $p(e_1) = p(e_2)$, dass

$$p_*(\pi_1(E, e_1)) = p_*(\pi_1(E, e_2)).$$

Beweis. a) Sei $x := p(e_1) = p(e_2)$. Da E wegzusammenhängend ist, ist nach Satz 8.29.a) die Monodromiewirkung von $\pi_1(X, x)$ auf E_x transitiv. Nach Lemma 8.58 sind daher alle Standgruppen der Wirkung konjugiert zueinander. Nach Satz 8.29.b) ist die Standgruppe der Wirkung in $e \in E_x$ gerade $p_*(\pi_1(E, e))$, also sind insbesondere $p_*(\pi_1(E, e_1))$ und $p_*(\pi_1(E, e_2))$ konjugiert zueinander.

- b) Da jede normale Untergruppe eine eigene Konjugationsklasse bildet, folgt aus a) und der Normalität von p , dass $p_*(\pi_1(E, e_1)) = p_*(\pi_1(E, e_2))$. □

Satz 8.60. Sei E zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung. p ist genau dann normal, wenn für alle $x \in X$ die Einschränkung der $D(E, p)$ -Wirkung auf E_x transitiv ist, d.h. für alle $e_1, e_2 \in E_x$ gibt es ein $f \in D(E, p)$ mit $f(e_1) = e_2$.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Dies folgt durch Kombination von Satz 8.56.b) mit Satz 8.59.b).

„ $\Leftarrow$ “: Dies ist Übungsaufgabe 4 von Blatt 14. □

Korollar 8.61. Sei G eine diskrete Gruppe und X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend mit einer eigentlich diskontinuierlichen G -Wirkung. Dann ist $p : X \rightarrow X/G$ eine normale Überlagerung.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 8.60, da für jedes $x \in X$ gilt, dass

$$p^{-1}(\{p(x)\}) = Gx,$$

auf welchem $D(E, p)$ transitiv wirkt, da $\{\ell_g \mid g \in G\} = D(E, p)$. $\square$

Im Folgenden bezeichnen wir für eine Gruppe G und eine Untergruppe $H \subset G$ den (aus Algebra I bekannten) Normalisator von H in G mit $N_G(H)$.

Satz 8.62. Sei E zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung. Sei $x_0 \in X$ und $e_0 \in E_{x_0}$. Sei $H := p_*(\pi_1(E, e_0))$ die charakteristische Untergruppe von p . Dann gilt:

$$D(E, p) \cong N_{\pi_1(X, x_0)}(H) / H.$$

Beweis. Sei $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ und sei $\tilde{\alpha} \in PE$ die eindeutige Hochhebung von α mit $\tilde{\alpha}(0) = e_0$. Wie wir im Beweis von Satz 8.41 gesehen haben, gilt

$$p_*(\ell_{\tilde{\alpha}}(\pi_1(E, e_0))) = \ell_{\alpha}(p_*(\pi_1(E, e_0))) = [\alpha]_w^{-1} \cdot H \cdot [\alpha]_w.$$

Mit Satz 7.6 folgt daraus, dass

$$p_*(\pi_1(E, \tilde{\alpha}(1))) = [\alpha]_w^{-1} \cdot H \cdot [\alpha]_w$$

Also gilt $[\alpha]_w \in N_{\pi_1(X, x_0)}(H)$ genau dann, wenn $p_*(\pi_1(E, \tilde{\alpha}(1))) = H$, was nach Satz 8.56 äquivalent ist zur Existenz eines eindeutigen $f_{\alpha} \in D(E, p)$ mit $f_{\alpha}(e_0) = \tilde{\alpha}(1)$. Definiere nun

$$\varphi : N_{\pi_1(X, x_0)}(H) \rightarrow D(E, p), \quad \varphi([\alpha]_w) = f_{\alpha}.$$

φ ist wegen des Monodromiesatzes wohldefiniert. Seien nun $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ mit $[\alpha]_w, [\beta]_w \in N_{\pi_1(X, x_0)}(H)$ und seien $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in PE$ Hochhebungen von α bzw. β mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = e_0$. Da f_{α} eine Deckbewegung ist, ist dann $\tilde{\alpha} * (f_{\alpha} \circ \tilde{\beta})$ eine in e_0 beginnende Hochhebung von $\alpha * \beta$, also ist
Dann ist

$$\begin{aligned} (\varphi([\alpha]_w \cdot [\beta]_w))(e_0) &= (\varphi([\alpha * \beta]_w))(e_0) \\ &= (\tilde{\alpha} * (f_{\alpha} \circ \tilde{\beta}))(1) = f_{\alpha}(\tilde{\beta}(1)) \\ &= (\varphi([\alpha]_w))(\tilde{\beta}(1)) = (\varphi([\alpha]_w))((\varphi([\beta]_w))(e_0)). \end{aligned}$$

Also ist $(\varphi([\alpha]_w \cdot [\beta]_w))(e_0) = (\varphi([\alpha]_w) \circ \varphi([\beta]_w))(e_0)$ und mit Satz 8.56.b) folgt daraus, dass

$$\varphi([\alpha]_w \cdot [\beta]_w) = \varphi([\alpha]_w) \circ \varphi([\beta]_w),$$

also dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Sei nun $f \in D(E, p)$ beliebig. Da E wegzusammenhängend ist, können wir einen Weg $\gamma \in P(E, e_0, f(e_0))$ finden und man rechnet nach (Übung), dass $f = \Phi([p \circ \gamma]_w)$. Also ist Φ surjektiv. Da Φ surjektiver Gruppenhomomorphismus ist, folgt daraus, dass Φ einen Isomorphismus induziert:

$$N_{\pi_1(X, x_0)}(H) / \ker \Phi \cong D(E, p).$$

Nach Satz 8.35.a) gilt genau dann $\Phi([\alpha]_w) = f_\alpha = \text{id}_E$, wenn

$$f_\alpha(e_0) = e_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\alpha}(1) = e_0,$$

wenn also $[\alpha]_w$ in der Standgruppe der Monodromiewirkung liegt. Nach Satz 8.29.b) folgt damit

$$\ker \Phi = p_*(\pi_1(E, e_0)) = H.$$

Also haben wir die Behauptung gezeigt. $\square$

Korollar 8.63. Sei E zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung. Sei $x_0 \in X$.

a) Ist p normal und $e \in E_{x_0}$, so ist $D(E, p) \cong \pi_1(X, x_0) / p_*(\pi_1(E, e))$.

b) Ist E einfach zusammenhängend, so ist $D(E, p) \cong \pi_1(X, x_0)$.

Beweis. a) Dies ist der Spezialfall $N_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(E, e))) = \pi_1(X, x_0)$ von Satz 8.62.

b) Dies ist der Spezialfall $p_*(\pi_1(E, e)) = \{1\}$ von Satz 8.62. $\square$

Korollar 8.64. Ist G eine diskrete Gruppe und X ein einfach zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum mit einer eigentlich diskontinuierlichen G -Wirkung, so ist für $x \in X/G$:

$$\pi_1(X/G, x) \cong G.$$

Beweis. Dies folgt aus Korollar 8.63 und Satz 8.55. $\square$

Bemerkung 8.65. Aus Korollar 8.64 lässt sich ein alternativer Beweis dafür herleiten, dass $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ für $n > 1$. Wie wir in Beispiel 5.12.(2) gesehen haben, ist $\mathbb{R}P^n$ homöomorph zum Bahnenraum einer $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung auf S^n und es lässt sich leicht zeigen, dass diese eigentlich diskontinuierlich ist.

Beispiel 8.66. Sei $G \subset \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$, $G = \langle \{a, b\} \rangle$, die von den Homöomorphismen

$$a(x, y) = (x + 1, y), \quad b(x, y) = (1 - x, y + 1),$$

erzeugte Untergruppe. Ist G mit der diskreten Topologie versehen, so ist

$$G \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (f, (x, y)) \mapsto f(x, y),$$

eine G -Wirkung auf $\mathbb{R}^2$. Da $\|a(x, y) - (x, y)\| = 1$ und $\|b(x, y) - (x, y)\| \geq 1$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ist die Wirkung eigentlich diskontinuierlich, also folgt aus Korollar 8.64, dass

$$\pi_1(\mathbb{R}^2/G) \cong G.$$

Den Raum $\mathbb{R}^2/G$ kennen wir jedoch schon: malen wir uns ein Schaubild mit allen Quadraten der Form $[k, k+1] \times [l, l+1]$ auf, wobei $k, l \in \mathbb{Z}$, und betrachten, welche Kanten der Quadrate mit welchen anderen identifiziert werden, so folgert man, dass die Inklusion $i : [0, 1]^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ einen Homöomorphismus zwischen der Kleinschen Flasche K und $\mathbb{R}^2/G$ induziert. Wir haben also gezeigt, dass

$$\pi_1(K) \cong G.$$

Korollar 8.67. *Der 2-Torus T^2 und die Kleinsche Flasche K sind nicht homotopieäquivalent.*

Beweis. Wir haben in Korollar 7.40 gesehen, dass $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$, also insbesondere abelsch ist. $\pi_1(K)$ ist jedoch nicht abelsch: in der Notation des vorigen Beispiels ist

$$(a \circ b)(x, y) = a(1 - x, y + 1) = (2 - x, y + 1), \quad (b \circ a)(x, y) = b(x + 1, y) = (-x, y).$$

Also ist $a \circ b \neq b \circ a$, so dass $\pi_1(K)$ nicht abelsch sein kann. Folglich ist $\pi_1(T^2) \not\cong \pi_1(K)$, so dass T^2 und K nach Satz 7.10 nicht homotopieäquivalent sein können. $\square$

Kapitel 9

Ausblick

In diesem kurzen Kapitel wollen wir nur einen kurzen Ausblick auf einige Themen geben, die wir entweder aus Zeitgründen nicht mehr geschafft haben oder die man im Anschluss an den Vorlesungsstoff weiter betrachten könnte.

Der Satz von Seifert und van Kampen

Diesen Satz habe ich in den ersten Videos zwar großspurig angekündigt, es aber leider doch nicht mehr geschafft, ihn zu besprechen. Ich möchte ihn dennoch zumindest kurz angeben

Seien G_1 und G_2 Gruppen. Das *freie Produkt von G_1 und G_2* ist gegeben als

$$G_1 * G_2 := \{(g_1, \dots, g_n) \mid n \in \mathbb{N}, g_1, \dots, g_n \in G_1 \sqcup G_2\} / \sim,$$

wobei $\sim$ die kleinste Äquivalenzrelation auf der betrachteten Menge ist, für die gilt, dass

$$\begin{aligned} (g_1, \dots, g_{i-1}, g_i, g_i^{-1}, g_{i+1}, \dots, g_n) &\sim (g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n), \\ (g_1, \dots, g_{i-1}, 1_{G_1}, g_{i+1}, \dots, g_n) &\sim (g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n), \\ (g_1, \dots, g_{i-1}, 1_{G_2}, g_{i+1}, \dots, g_n) &\sim (g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n), \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}, g_1, \dots, g_n \in G_1 \sqcup G_2$. Die Operation

$$(g_1, \dots, g_n) \cdot (h_1, \dots, h_m) := (g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m)$$

induziert eine Gruppenstruktur auf $G_1 * G_2$.

Mit Hilfe dieses freien Produkts lässt sich nun ausdrücken in wie weit sich die Fundamentalgruppe eines Raumes aus Fundamentalgruppen einer Überdeckung zusammensetzt.

Satz 9.1 (Satz von Seifert und van Kampen, einfache Version). *Sei X ein topologischer Raum, $U, V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V \neq \emptyset$, so dass U, V und $U \cap V$ wegzusammenhängend sind. Seien $i : U \cap V \hookrightarrow U$ und $j : U \cap V \hookrightarrow V$ die Inklusionen. Für $x_0 \in U \cap V$ ist dann*

$$\pi_1(X, x_0) = (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)) / N,$$

wobei N die kleinste normale Untergruppe von $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ sei, die die Menge

$$\{i_*(\sigma) \cdot (j_*(\sigma))^{-1} \in \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \mid \sigma \in \pi_1(U \cap V, x_0)\}$$

enthält.

In der allgemeinen Version des Satzes von Seifert und van Kampen erhält man eine ähnliche Formel für beliebige offene Überdeckungen $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, deren Elemente „schöne“ Schnitteigenschaften haben.

Hier ist eine weitere einfache Anwendung des Satzes von Seifert und van Kampen, nämlich die Berechnung der Fundamentalgruppe von Einpunktvereinigungen.

Korollar 9.2. *Seien X und Y wegzusammenhängende topologische Räume und sei $X \vee Y$ ihre Einpunktvereinigung. Dann ist*

$$\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y).$$

Details zum Satz von Seifert und van Kampen findet man etwa in bei *Allen Hatcher, Algebraic Topology, Abschnitt 1.2.*

Mannigfaltigkeiten

Ein grundsätzlicher Ansatz, dem man mit unserem Vorwissen folgen kann ist die Einschränkung auf Klassen von topologischen Räumen mit „schönen“ Strukturen und der Versuch, diese innerhalb ihrer Klasse weiter zu unterklassifizieren. Die meiner Meinung nach schönste Klasse topologischer Räume ist die der Mannigfaltigkeiten.

Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ein zweitabzählbarer Hausdorff-Raum, in dem jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Wir haben in der Vorlesung bereits einige Beispiele für Mannigfaltigkeiten gesehen. Zum Beispiel sind S^n oder T^n stets n -dimensionale Mannigfaltigkeiten. Es lässt sich auch zeigen, dass $\mathbb{R}P^n$ stets eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Die Kleinsche Flasche ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Eine grundsätzliche Frage ist nun, wie sich alle Mannigfaltigkeiten einer festen Dimension bis auf Homöomorphie klassifizieren lassen. Kompakte zweidimensionale Mannigfaltigkeiten lassen sich etwa bis auf Homöomorphie durch ihre Fundamentalgruppen klassifizieren (dies ist eine schöne Anwendung des Satzes von Seifert und van Kampen). Für beliebige Dimensionen ist diese Frage jedoch weitaus komplexer und

schwierig zu beantworten.

Für Details zu topologischen Mannigfaltigkeiten empfehle ich: *John M. Lee, Introduction to Topological Manifolds*.

Faserbündel

Seien F, E und B topologischer Räume. $p : E \rightarrow B$ heißt *Faserbündel mit Faser F* , wenn jeder Punkt in B eine offene Umgebung U besitzt, für die es einen Homöomorphismus $\phi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$ gibt, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[\approx]{\phi} & U \times F \\ p|_{p^{-1}(U)} \downarrow & \swarrow \text{pr}_U & \\ U & & \end{array}$$

Faserbündel sind also Räume, die lokal wie Produkte von zwei Räumen aussehen, als ganzes aber kein Produkt sein müssen. Ein Beispiel dafür ist das Möbiusband M . Die Projektion auf den „Mittelkreis“ $p : M \rightarrow S^1$ ist ein Faserbündel mit Faser $[0, 1]$. Kleine Ausschnitte des Möbiusband sehen aus wie das Produkt zweier Intervalle, das Möbiusband als Ganzes ist jedoch kein Produkt, da es eine „Verdrehung“ enthält.

Faserbündel lassen sich also als „verdrehte Produkte“ auffassen und man kann sich viele Gedanken darüber machen, auf welche Arten und Weisen sich Räume derart verdrehen lassen und wie für ein Faserbündel $p : E \rightarrow B$ die Topologie von E durch die Topologien von B und F und der Abbildung p bestimmt werden.

Ist B zusammenhängend und F diskret, so ist ein Faserbündel $p : E \rightarrow B$ mit Faser F nichts anderes als eine Überlagerung. Ähnlich wie bei Überlagerungen kann man daher über Hochhebungen von Abbildungen usw. nachdenken.

Mehr über Faserbündel findet man etwa in: *Gerd Laures/Markus Szymik, Grundkurs Topologie, Kapitel 9*.

Höhere Homotopiegruppen

Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $1_n := (1, 0, 0, \dots, 0) \in S^n$. Ist X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$, so ist die n -te Homotopiegruppe von X in x_0 als Menge definiert durch

$$\pi_n(X, x_0) := [S^n, 1_n; X, x_0] = \{f \in C^0(S^n, X) \mid f(1_n) = x_0\} / \simeq.$$

Die Gruppenstruktur aus $\pi_n(X, x_0)$ erhält man dadurch, dass man durch Kollabieren des Äquators eine Abbildung $v : S^2 \rightarrow S^2 \vee S^2$ bekommt, die jeweils Nord und Südhalbkugel der Sphäre auf eine der beiden Sphären in $S^2 \vee S^2$ abbildet. Sind $f, g \in C^0(S^n, X)$

mit $f(1_n) = g(1_n) = x_0$ gegeben, so erhält man eine Abbildung $f \vee g : S^2 \rightarrow X$, indem man zunächst v anwendet und dann f auf der einen und g auf der anderen Sphäre verwendet. Diese Operation verallgemeinert die Konkatenation von Schleifen und induziert ein Produkt auf $\pi_n(X, x_0)$.

Während Homotopiegruppen sich wie gerade gesehen leicht definieren lassen, haben sie einen gravierenden Nachteil: sie lassen sich nur sehr schwer ausrechnen. In der algebraischen Topologie untersucht man daher oft zunächst singuläre Homologiegruppen topologischer Räume, deren Konstruktion zwar deutlich aufwändiger ist, die sich jedoch deutlich leichter durch verschiedene Sätze und Techniken berechnen lassen und aus denen man bereits sehr viele Informationen über den Raum erhält.

Eine gut lesbare Einführung in höhere Homotopiegruppen findet man in Chapter 4 von *Allen Hatcher, Algebraic Topology*.

Anhang A

Exkurse

A.1 Netze und Moore-Smith-Konvergenz

In den Abschnitten 1.4 und 4.2 im Hauptteil haben wir gesehen, dass sich Begriffe wie Abschluss, Stetigkeit und Kompaktheit in Topologien *mit gewissen Abzählbarkeitseigenschaften* äquivalent durch Konvergenz von Folgen ausdrücken lassen, dass diese Äquivalenz aber für allgemeine topologische Räume nicht gelten muss.

Netze in topologischen Räumen sind Verallgemeinerungen von Folgen, für die sich ein verallgemeinerter Konvergenzbegriff einführen lässt. Mit Hilfe des Formalismus der Netze die Begriffe Abschluss, Stetigkeit und Kompaktheit für allgemeine topologische Räume äquivalent durch Konvergenz von *Netzen* ausdrücken, indem wir also zu einem allgemeineren Konvergenzbegriff übergehen.

Netze sind dabei eng verwandt mit den in Abschnitt 4.6 betrachteten Filtern. Diesen Zusammenhang werden wir weiter unten näher beleuchten.

Definition A.1. Eine Menge I heißt *gerichtet*, wenn auf ihr eine Relation $\leq$ mit den folgenden Eigenschaften definiert ist:

- (i) (Reflexivität) $i \leq i$ für alle $i \in I$.
- (ii) (Transitivität) Ist $i_1 \leq i_2$ und $i_2 \leq i_3$, so ist $i_1 \leq i_3$.
- (iii) Für alle $i_1, i_2 \in I$ gibt es ein $i_3 \in I$ mit $i_1 \leq i_3$ und $i_2 \leq i_3$.

Schreibe $i_1 \geq i_2$, wenn $i_2 \leq i_1$ gilt.

Beispiel A.2. (1) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind gerichtete Mengen mit der üblichen Relation $\leq$.

(2) Sei X ein topologischer Raum. Für jedes $x \in X$ ist der Umgebungsfiler $\mathcal{U}(x)$ eine gerichtete Menge mit der Operation

$$U_1 \leq U_2 \quad :\Leftrightarrow \quad U_1 \supset U_2.$$

(3) Sei $[a, b]$ ein Intervall. Die Menge der Zerlegungen von $[a, b]$,

$$\mathcal{Z} := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid n \in \mathbb{N}, a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

ist eine gerichtete Menge mittels

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \leq (y_0, y_1, \dots, y_m) \quad :\Leftrightarrow \quad \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \{y_0, y_1, \dots, y_m\}.$$

Eine Folge in X ist nach Definition nichts anderes als eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow X$. Allgemeiner wollen wir nun Abbildungen auf beliebigen gerichteten Mengen betrachten.

Definition A.3. Sei X ein topologischer Raum.

- (1) Ein *Netz* in X ist eine Abbildung $\Phi : I \rightarrow X$, wobei I eine gerichtete Menge sei. Schreibe auch $(\Phi(i))_{i \in I}$ statt Φ .
- (2) Sei $x \in X$. Ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ *konvergiert gegen* $x \in X$, wenn es für jede Umgebung U von x ein $i_0 \in I$ gibt, so dass $x_i \in U$ für alle $i \in I$ mit $i \geq i_0$. Diese Form von Konvergenz heißt auch *Moore-Smith-Konvergenz*. Schreibe dann $(x_i)_{i \in I} \rightarrow x$.

Beispiel A.4. Sei X ein topologischer Raum.

- (1) Jede Folge in X ist ein Netz in X . Außerdem konvergiert eine Folge genau dann gegen $x \in X$, wenn sie im Sinne von Definition A.3.(2) gegen x konvergiert.
- (2) Wähle für $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $x_U \in U$. Dann konvergiert das Netz $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$ gegen x .
- (3) Sei wieder $\mathcal{Z}$ die Menge der Zerlegungen von $[a, b]$ und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir betrachten die folgenden beiden Netze:

$$\begin{aligned} \Phi_1 : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_1(x_0, x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f, \\ \Phi_2 : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_2(x_0, x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f. \end{aligned}$$

f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn Φ_1 und Φ_2 gegen denselben Wert c konvergieren, dann ist $c = \int_a^b f(x) dx$.

Der folgende Satz verallgemeinert Satz 1.32, in welchem wir für erstabzählbare Räume den Abschluss einer Menge durch Grenzwerte von Folgen charakterisiert haben.

Satz A.5. Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subset X$. Dann gilt:

$$\bar{A} = \{x \in X \mid \text{es gibt ein Netz in } A \text{ mit } (x_i)_{i \in I} \rightarrow x\}.$$

Beweis. „ $\subset$ “: Sei $x \in \bar{A}$. Nach Satz 1.23 gilt dann für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$, dass $U \cap A \neq \emptyset$. Wählen wir für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $x_U \in U \cap A$, so ist $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$ ein Netz in A , welches gegen x konvergiert.

„ $\supset$ “: Ist $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in A , welches gegen x konvergiert, so enthält nach Definition der Konvergenz jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ ein Element des Netzes. Also ist $U \cap A \neq \emptyset$ für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ und nach Satz 1.23 folgt $x \in \bar{A}$. $\square$

Wir haben in Satz 3.35 gesehen, dass die Grenzwerte von Folgen in Hausdorff-Räumen stets eindeutig sind. Der folgende Satz zeigt, dass sich die Hausdorff-Eigenschaft sogar durch die Eindeutigkeit der Grenzwerte von Netzen charakterisieren lässt.

Satz A.6. *Ein topologischer Raum X ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn der Grenzwert jedes konvergenten Netzes in X eindeutig ist.*

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Dies folgt völlig analog zu Satz 3.35.

„ $\Leftarrow$ “: Nehme an, dass X kein Hausdorff-Raum ist und seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Punkte, die keine disjunkten offenen Umgebungen besitzen. Sei dann $I := \mathcal{U}(x) \times \mathcal{U}(y)$. I ist eine gerichtete Menge mit der Relation

$$(U, V) \leq (U', V') \quad :\Leftrightarrow \quad U' \subset U \wedge V' \subset V.$$

Nach Annahme ist $U \cap V \neq \emptyset$ für alle $(U, V) \in I$, sei daher $\Phi : I \rightarrow X$ ein Netz mit $\Phi(U, V) \in U \cap V$ für alle $(U, V) \in I$. Sei nun W eine beliebige Umgebung von x . Ist $V \in \mathcal{U}(y)$ beliebig, so ist $\Phi(W, V) \in W$. Für alle $(U', V') \in I$ mit $(W, V) \leq (U', V')$ ist dann $\Phi(U', V') \in U' \cap V' \subset W \cap V \subset W$. Also konvergiert Φ gegen x . Völlig analog zeigt man, dass Φ auch gegen y konvergiert. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

In Satz 1.29 haben wir gesehen, dass Stetigkeit und Folgenstetigkeit zwar für erstabzählbare Räume äquivalent sind, dies im Allgemeinen jedoch nicht der Fall ist. Als Nächstes werden wir sehen, dass Netze hierfür Abhilfe schaffen und dass Stetigkeit im Allgemeinen äquivalent zu „Netzstetigkeit“ ist.

Satz A.7. *Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$. f ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn für jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ mit $(x_i)_{i \in I} \rightarrow x$ gilt, dass $(f(x_i))_{i \in I} \rightarrow f(x)$.*

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Dies folgt völlig analog zu Satz 1.29.

„ $\Leftarrow$ “: Nehme an, dass f in x nicht stetig ist. Dann gibt es eine offene Umgebung $V \subset Y$ von $f(x)$, so dass $A := f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x ist. Dann ist $U \not\subset A$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$. Wähle dann für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $x_U \in U \setminus A$ und betrachte das Netz $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$. Wie oben betrachtet konvergiert $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$ gegen x , nach Konstruktion ist jedoch $f(x_U) \notin V$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$. Damit folgt, dass das Netz $(f(x_U))_{U \in \mathcal{U}(x)}$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert. Also folgt die Behauptung. $\square$

In Abschnitt 4.6 haben wir bereits die Konvergenz von Filtern eingeführt und durch diesen verallgemeinerten Konvergenzbegriff Kompaktheit neu formulieren können. Es stellt sich nun heraus, dass der Zugang durch Filter und der Zugang durch Netze tatsächlich äquivalent zueinander sind. Dies wollen wir im Folgenden weiter ausführen und zum Ende den Kompaktheitsbegriff durch Netze ausdrücken.

Sei X ein topologischer Raum. Jedem Netz $(x_i)_{i \in I}$ in X können wir einen Filter auf X zuordnen durch

$$\mathcal{F}((x_i)_{i \in I}) := \{U \subset X \mid \exists i_0 \in I \text{ mit } x_i \in U \forall i \geq i_0\}.$$

Die folgende Aussage ist leicht zu sehen, wir überspringen deshalb ihren Beweis.

Satz A.8. Sei X ein topologischer Raum, $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X und $x \in X$. $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X . $(x_i)_{i \in I}$ konvergiert genau dann gegen x , wenn der Filter $\mathcal{F}((x_i)_{i \in I})$ gegen x konvergiert.

Umgekehrt können wir nun Filtern Netze zuordnen. Sei $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ ein Filter auf X , wobei I eine beliebige Indexmenge sei. Wir definieren eine Relation auf I durch .

$$i_1 \leq i_2 \quad :\Leftrightarrow \quad F_{i_1} \supset F_{i_2}. \quad (\text{A.1})$$

Reflexivität und Transitivität von $\leq$ sind klar. Eigenschaft (iii) einer gerichteten Menge folgt aus Eigenschaft (iv) eines Filters: für alle $i_1, i_2 \in I$ gibt es nach dieser ein $i_3 \in I$ mit $F_{i_3} = F_{i_1} \cap F_{i_2}$. Insbesondere gilt also $F_{i_3} \subset F_{i_1}$ und $F_{i_3} \subset F_{i_2}$, also $i_1 \leq i_3$ und $i_2 \leq i_3$. Folglich ist I eine gerichtete Menge.

Wählen wir nun für jedes $i \in I$ ein beliebiges $x_i \in X$, so ist durch $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz definiert. Ein solches Netz nennen wir *mit $\mathcal{F}$ assoziiert*. Auch der folgende Satz folgt direkt aus den Definitionen, weshalb wir seinen Beweis ebenfalls überspringen.

Satz A.9. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf X , der gegen x konvergiert, so konvergiert jedes mit $\mathcal{F}$ assoziierte Netz gegen x .

Definition A.10. Sei X ein topologischer Raum und $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in I .

- (1) Sei $A \subset X$. $(x_i)_{i \in I}$ liegt *schließlich in A* , wenn es ein $i_0 \in I$ gibt, so dass $x_i \in A$ für alle $i \in I$ mit $i \geq i_0$.
- (2) $(x_i)_{i \in I}$ heißt *universell*, wenn für jedes $A \subset X$ gilt, dass $(x_i)_{i \in I}$ schließlich in A oder schließlich in $X \setminus A$ liegt.

Satz A.11. Sei X ein topologischer Raum.

- a) Ist $(x_i)_{i \in I}$ ein universelles Netz, so ist $\mathcal{F}((x_i)_{i \in I})$ ein Ultrafilter.
- b) Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter, so ist jedes mit $\mathcal{F}$ assoziierte Netz universell.

Beweis. Beide Teile folgen direkt aus den Definitionen. □

Wir haben in Abschnitt 4.6 gesehen, dass die Kompaktheit einer Menge sich durch Filter ausdrücken lässt. Analog lässt sich Kompaktheit auch durch Netze ausdrücken, was eine Verallgemeinerung von Folgenkompaktheit darstellt, wozu wir zunächst ein weiteren Begriff einführen, der den Begriff der Teilfolge verallgemeinert.

Definition A.12. Sei X ein topologischer Raum und $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X . Ist J eine gerichtete Menge und $\varphi : J \rightarrow I$ eine Abbildung, so dass

$$\forall i_0 \in I \exists j_0 \in J, \text{ so dass } \varphi(j) \geq i_0 \quad \forall j \in J \text{ mit } j \geq j_0,$$

so heißt $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$ ein *Teilnetz* von $(x_i)_{i \in I}$.

Satz A.13. Sei X ein topologischer Raum und $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X . Dann gilt:

- a) Für jedes Teilnetz $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$ ist $\mathcal{F}((x_i)_{i \in I}) \subset \mathcal{F}((x_{\varphi(j)})_{j \in J})$.
- b) Ist $\mathcal{G}$ ein Filter mit $\mathcal{F}((x_i)_{i \in I}) \subset \mathcal{G}$, so gibt es ein Teilnetz von $(x_i)_{i \in I}$, das mit $\mathcal{G}$ assoziiert ist.

Beweis. a) Dies folgt direkt aus der Definition der Filter.

- b) Setze $\mathcal{F} := \mathcal{F}((x_i)_{i \in I})$ und sei $\mathcal{G} = (G_a)_{a \in A}$ für eine geeignete Indexmenge A . Falls es ein $G_a \in \mathcal{G}$ gäbe, so dass $x_i \notin G_a$ für alle $i \in I$, so würde folgen, dass $G_a \cap B_i = \emptyset$ für alle $i \in I$, wobei $B_i = \{x_\lambda \mid \lambda \in I, \lambda \geq i\}$. Da aber $B_i \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, widerspräche das Filtereigenschaft (iv). Also enthält jedes $G_a \in \mathcal{G}$ eines der x_i . Definiere nun eine Relation auf A wie in (A.1), so dass A gerichtet ist.

Wähle $\varphi : A \rightarrow I$, so dass $x_{\varphi(a)} \in G_a$ für jedes $a \in A$. Da $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, gibt es insbesondere für jedes $i_0 \in I$ ein $a_0 \in \mathcal{G}$ mit $G_{a_0} \subset B_{i_0}$. Nach Konstruktion ist dann $x_{\varphi(a_0)} \in B_{i_0}$, also $i_0 \leq \varphi(a_0)$. Nach Definition der Relation auf A folgt, dass $i_0 \leq \varphi(a)$ für alle $a \in A$ mit $a_0 \leq a$. Also ist $(x_{\varphi(a)})_{a \in A}$ ein Teilnetz von $(x_i)_{i \in I}$, das mit $\mathcal{G}$ assoziiert ist. $\square$

Der folgende Satz ist das analoge Resultat zu Satz 4.68.

Satz A.14. *Jedes Netz in einem topologischen Raum besitzt ein universelles Teilnetz.*

Beweis. Dies folgt durch Kombination von Satz 4.68, Satz A.11.b) und Satz A.13.b). $\square$

Satz A.15. *Ein topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn jedes universelle Netz in X konvergiert.*

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Nach Satz 4.69 ist jeder Ultrafilter in X konvergent. Damit folgt die Behauptung durch Kombination von Satz A.11.a) und Satz A.8.

„ $\Leftarrow$ “: Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X und sei $(x_i)_{i \in I}$ ein zu $\mathcal{F}$ assoziiertes Netz. Nach Satz A.11.b) ist $(x_i)_{i \in I}$ universell, also nach Annahme konvergent. Daher ist nach Satz A.8 $\mathcal{F}((x_i)_{i \in I})$ konvergent. Nach Konstruktion von $(x_i)_{i \in I}$ ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}((x_i)_{i \in I})$ und da $\mathcal{F}$ Ultrafilter ist, folgt $\mathcal{F} = \mathcal{F}((x_i)_{i \in I})$. Folglich ist $\mathcal{F}$ konvergent. Da $\mathcal{F}$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung aus Satz 4.69. $\square$

Mit diesem Satz können wir schließlich die Beziehung zwischen Kompaktheit und Konvergenz durch Netze verallgemeinern.

Lemma A.16. *Ein universelles Netz, das ein konvergentes Teilnetz besitzt, ist selbst konvergent.*

Beweis. Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein universelles Netz in einem topologischen Raum X mit konvergentem Teilnetz $(x_{\varphi(j)})_{j \in J} \rightarrow x$. Nach Satz A.8 ist dann $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}((x_{\varphi(j)})_{j \in J})$. Da nach Satz A.13 gilt, dass $\mathcal{F}((x_i)_{i \in I}) \subset \mathcal{F}((x_{\varphi(j)})_{j \in J})$, da $\mathcal{F}((x_i)_{i \in I})$ nach Satz A.11 aber ein Ultrafilter ist, folgt $\mathcal{F}((x_i)_{i \in I}) = \mathcal{F}((x_{\varphi(j)})_{j \in J})$ und damit $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}((x_i)_{i \in I})$. Also konvergiert $(x_i)_{i \in I}$ nach Satz A.8 gegen x . $\square$

Korollar A.17. *Ein topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn jedes Netz in X ein konvergentes Teilnetz besitzt.*

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Dies folgt aus Satz A.14 und Satz A.15.

„ $\Leftarrow$ “: Nach Annahme und Lemma A.16 konvergiert jedes universelle Netz, also folgt die Kompaktheit aus Satz A.15. $\square$

Für Details und weitere Erläuterungen empfehlen wir den folgenden Artikel:

R. G. Bartle, *Nets and Filters in Topology*, The American Mathematical Monthly, Vol. 62, No. 8 (1955), S. 551-557, <https://www.jstor.org/stable/2307247>.